APUNTES ELECTRÓNICOS DE MECANICA CLASICA

2016

FACULTAD DE INGENIERÍA ARQUITECTURA Y DISEÑO
CARRETERA TRANSPENINSULAR ENSENADA-TIJUANA
NUMERO 3917, COLONIA PLAYITAS

Ensenada, B.C., C.P. 22860. Teléfono 646-1750744, Fax 646-1744333

E-mail: Jorge.mata@uabc.edu.mx

CONTENIDO

Tema 2. MOVIMIENTO: LEYES DE NEWTON

Las propiedades fundamentales de la fuerza y la relación entre la fuerza y la aceleración están contenidas en las tres leyes de Newton de movimiento.
La primera de estas leyes describe el estado natural del movimiento en la fuerza externa neta actúa, mientras que las otras dos leyes se ocupan del comportamiento de los cuerpos a influencia de fuerzas externas.
La primera ley fue descubierta por Galileo Galilei a comienzos del siglo XVII, pero le tocó a Isaac Newton, en la segunda mitad del siglo XVII, formular una teoría coherente de fuerzas y establecer un conjunto completo de ecuaciones a partir de que se puede calcular el movimiento de cuerpos bajo la influencia de fuerzas arbitrarias.
El estudio de las fuerzas y sus efectos sobre el movimiento de los cuerpos se llama dinámica, y las leyes del movimiento de Newton a veces se llaman las leyes de la dinámica.
Tema 2.1. Masa, aceleración y fuerza
La unidad de Masa.
La unidad de masa es el kilogramo. El estándar de masa es un cilindro una aleación de platino-iridio conservada en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.
El kilogramo (1 Kg) se define exactamente igual a la masa de este cilindro. La masa es la única unidad fundamental para la cual todavía no se tiene un estándar atómico.
La masa se mide con un equilibrio, un instrumento que compara el peso de una masa desconocida con una fuerza conocida, como el peso de la masa estándar o de un resorte calibrado. La presión es directamente proporcional a la masa, y las ponderaciones implican masas iguales.
Las masas de átomos se miden a menudo en términos de la unidad de masa atómica (1 u), que es exactamente la masa de un átomo de carbono-12:

$$unidad\ de\ masa\ atómica = 1U = \frac{Masa\ del\ carbono\ 12}{12} = \frac{1.992X10^{-26}Kg}{12} =$$
$$= 1.66054X10^{-27}Kg.$$

Múltiplos y submúltiplos del kilogramo.
En el sistema británico de unidades, la unidad de masa es la libra, que es exactamente 0.453 592 37 Kg.
Para una comprensión rápida de la relación aproximada entre unidades británicas y métricas:
1 yarda ≈ 1 m
1 milla ≈ 1,6 Km
1 libra ≈ ½ Kg
1 cuarto ≈ 1 litro
1 galón ≈ 4 litros

Ejercicio 1.
¿Cuál es tu masa en gramos?, ¿En libras? ¿En masas atómicas?
Respuesta:
Suponiendo que su masa es de 60 Kg, la masa se calcula con:

$$Masa\ en\ Kg\left(\frac{1000\ gramos}{1\ Kg}\right) = 60\ Kg\left(\frac{1000\ gramos}{1\ Kg}\right) = 60000\ gramos$$

Para calcularla en libras utilizamos la conversión de Kg a libras:

$$Masa\ en\ Kg\left(\frac{0.5\ libras}{1\ Kg}\right) = 60\ Kg\left(\frac{0.5\ libras}{1\ Kg}\right) \approx 30\ \text{libras}$$

El cálculo para masas atómicas es:

$$Masa\ en\ Kg\left(\frac{1.66054X10^{-27}Kg}{1U}\right) = 60Kg\left(\frac{1.66054X10^{-27}Kg}{1U}\right) \approx 10^{-26}\ U$$

Aceleración.
Cualquier movimiento con un cambio de velocidad es movimiento acelerado. Así, el movimiento de un automóvil que se acelera es el movimiento acelerado, pero también lo es el movimiento de un automóvil que se ralentiza mientras se frena - en ambos casos hay un cambio de velocidad. Si una partícula tiene velocidad v1 en el instante t1 y velocidad v2 en el instante t2, entonces la aceleración media para este intervalo de tiempo se define como el cambio de velocidad dividido por el cambio de tiempo:

$$a = \frac{v2 - v1}{t2 - t1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

En consecuencia, la aceleración media es la tasa media de variación de la velocidad, o el cambio medio de velocidad por unidad de tiempo. La unidad de aceleración es la unidad de velocidad dividida por la unidad de tiempo. Por consiguiente, en el sistema SI, la unidad de aceleración es el metro por segundo por segundo, o metro por segundo cuadrado [(m/s), o m/s2].
La aceleración puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo del cambio de velocidad v2\v1. Si la velocidad es positiva y aumenta en magnitud, la aceleración es positiva; Si la velocidad es positiva y decreciente en magnitud, la aceleración es negativa. Sin embargo, tenga en cuenta que si la velocidad es negativa (movimiento en la dirección x negativa) y aumentando en magnitud, es decir, cada vez más negativo, la aceleración es negativa. Así, un automóvil acelerando mientras se mueve en la dirección x negativa tiene aceleración negativa; Por el contrario, un automóvil ralentizando o "desacelerando" mientras se mueve en el negativo x dirección tiene aceleración positiva.
La aceleración instantánea en algún instante de tiempo es la pendiente de la tangente, dibujado en la gráfica de velocidad vs. tiempo.
Como en el caso de la velocidad instantánea, la aceleración instantánea también se puede calcular como el límite de la relación de pequeños incrementos:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Esto dice que la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Equivalentemente, podemos decir que la aceleración es la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo, es decir

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \; o \; a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Por ejemplo, la aceleración calculada por diferenciación de la fórmula de velocidad es:

$$a = \frac{d}{dt}(4.752t - 0.126t^2) = 4.752 - 0.252t$$

donde la aceleración se mide en m/s2. Por ejemplo, en t =4s, esta relación da a=3.74 m/s², de acuerdo con la pendiente de la tangente a la curva de velocidad, a =3.7 m/s².

Movimiento con aceleración constante

La aceleración de un cuerpo puede variar en función de la posición o del tiempo. Sin embargo, es muy común que un cuerpo experimente una aceleración constante, al menos durante algún intervalo de tiempo; Esto permite un análisis más simple. La aceleración constante implica una pendiente constante en el gráfico de velocidad vs. tiempo; Así la trama es una línea recta. En este caso, la velocidad simplemente aumenta (o disminuye) en cantidades iguales en cada intervalo de tiempo de 1 segundo.

En el caso de la aceleración constante, hay algunas relaciones simples entre la aceleración, velocidad, posición y tiempo que nos permiten calcular una de estas cantidades de los demás. Supongamos que la velocidad inicial en el tiempo cero es v0 y que la velocidad aumenta a una velocidad constante dada por la aceleración constante a. Después de transcurrido un tiempo t, la velocidad habrá aumentado en una cantidad at, y habrá alcanzado el valor

$$v = v_0 + at$$

Supongamos que la posición inicial es x0 en el tiempo cero. Después de transcurrido un tiempo t, la posición habrá cambiado en una cantidad igual al producto de la velocidad media multiplicado por el tiempo; Es decir, la posición habrá cambiado desde el valor inicial x0 a

$$x = x_0 + vt$$

Puesto que la velocidad aumenta uniformemente con el tiempo, el valor medio de la velocidad es simplemente el promedio del valor inicial y los valores finales, o

$$v = \frac{1}{2}(V_0 + v)$$

Y entonces:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

Para expresarlo en términos de la aceleración:

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + at)t = \frac{1}{2}(v_0 t + at^2)$$

El lado derecho de esta ecuación consiste en dos términos: el término v0t representa el cambio en posición que la partícula sufriría si se movía a velocidad constante v0, y el término at representa el efecto de la aceleración.

Despejando el tiempo de las ecuaciones obtenemos:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

Al sustituirlo en la ecuación anterior tenemos:

$$x - x_0 = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2 - {v_0}^2}{a}$$

Que se puede reordenar como:

$$a(x - x_0) = \frac{1}{2}(v^2 - v^2{}_0)$$

Ejemplo 1.

Un automóvil viajando inicialmente a 50Km/h cae en un estado estacionario, en una barrera rígida. El extremo delantero del automóvil se arruga, y el habitáculo se detiene después de avanzar por 0.40 m. Suponiendo una desaceleración constante durante el accidente, ¿cuál es el valor de ¿desaceleración? ¿Cuánto tiempo tarda el compartimiento para pasajeros para detener?

SOLUCIÓN: Las cantidades conocidas son la velocidad inicial (v0=50 Km/h justo antes de que el automóvil entre en contacto con la barrera), la velocidad final (v=0 cuando el compartimiento de pasajeros se para), y el cambio de posición del compartimiento de pasajeros (X - x0=40m):

Para encontrar la aceleración, usaremos la última ecuación, porque la aceleración aparece como la única cantidad desconocida.

$$a = \frac{1}{2}\frac{(v^2 - v^2{}_0)}{(x - x_0)}$$

Sustituimos las cantidades conocidas: Vo=50Km/h= 13.9m/s,

$$a = \frac{1}{2}\frac{(v^2 - v^2{}_0)}{(x - x_0)} = \frac{-(\frac{13.9m}{s})^2}{2 * .40m} = -240m/s$$

Esta es una gran desaceleración. Un pasajero involucrado en un accidente a menos que esté bien sujeto por un cinturón de seguridad cómodo o un airbag.

Podemos calcular a continuación, a partir de la ecuación con el tiempo despejado, el tiempo en el que el compartimiento para pasajeros le toma para parar.

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-13.9m/s}{-240\ m/s^2} = 0.058\ s$$

Ejemplo 2.

Un automóvil viaja a 86 km / h en una carretera recta cuando el conductor detecta una ruina adelante y golpea los frenos. El tiempo de reacción del conductor, es decir, el intervalo de tiempo entre ver el

naufragio y él pisando los frenos, es de 0.75 s. Una vez que se aplican los frenos, el automóvil desacelera a 8,0 m / s2. ¿Cuál es la distancia total de parada?
SOLUCIÓN: El movimiento tiene dos partes. La primera parte, antes de que se apliquen los frenos, es movimiento a velocidad constante; La segunda parte, después de que se apliquen los frenos, es movimiento con aceleración constante (negativa).
La primera parte del movimiento dura un tiempo Δt= 0.75 s, con una velocidad constante Vo= 86 Km/h, es decir:

$$v_0 = 86\ \frac{Km}{h} X \frac{10^3 m}{1\,Km} X \frac{1\,h}{3600\,s} = 24\,m/s$$

A esa velocidad, el automóvil viaja a una distancia:

$$v_0 \Delta t = \frac{24m}{s} * .75s = 18\,m$$

Por lo tanto, la segunda parte del movimiento tiene una posición inicial x0= 18 m, una velocidad inicial vo=24 m/s, una velocidad final v=0 y una aceleración a=-8.0 m/s² (la aceleración es negativa ya que el automóvil está desacelerando mientras se mueve en la dirección x positiva). La distancia final desconocida es:
La ecuación más adecuada para la solución de este problema es la que contiene la cantidad desconocida y se conocen todas las otras cantidades en ella. Resolviendo esta ecuación para x, encontramos que la distancia total de parada es:

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = 18m + \frac{0 - (24m/s)^2}{2 * \left(-\frac{8m}{s^2}\right)} = 18m + 36m = 54m$$

La aceleración de caída libre
Un cuerpo liberado cerca de la superficie de la Tierra acelerará hacia abajo bajo la influencia de la atracción de la gravedad ejercida por la Tierra. Si la resistencia de fricción del aire ha sido eliminada, (colocando el cuerpo en un recipiente evacuado), entonces el cuerpo está en caída libre, y el movimiento descendente procede con aceleración constante.
Es un hecho notable que el valor de esta aceleración de la caída libre es exactamente igual para todos los cuerpos liberados a la misma ubicación, el valor de la aceleración es completamente independiente de las velocidades, masas, tamaños, formas, composiciones químicas, etc., de los cuerpos.
La aceleración descendente de un cuerpo que cae libremente cerca de la superficie de la Tierra se denota generalmente por g. El valor numérico de g es aproximadamente 9.81 m/s².
Para la descripción del movimiento de caída libre, podemos usar las fórmulas para el movimiento con
Aceleración constante desarrollada en la sección anterior. Para aplicar estas fórmulas, debemos hacer una elección para la dirección del eje x. Podemos tomar el eje x positivo en la dirección ascendente o positiva en la dirección descendente; Pero una vez que hacemos una

de estas opciones al principio de un problema, debemos adherirnos al final.
Para de la uniformidad, en todos los ejemplos de esta sección, tomaremos el eje x positiva en la dirección ascendente. Con esta elección del eje x, la aceleración de una partícula que cae libremente es negativa, es decir, a g se convierte en:

$$v = v_0 - gt$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-g(x - x_0) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

Ejemplo 1.
En Acapulco, los buzos profesionales divierten a los turistas saltando desde un precipicio de 36 m de altura hasta el mar (Fig. 2.20). ¿En cuánto tiempo caen? ¿Cuál es su velocidad de impacto en el agua?
SOLUCIÓN:
Para calcular el tiempo, usamos la segunda ecuación, dividiendo ambos lados entre -1/2g y tomamos la raíz de ambos lados:

$$t = \sqrt{-\frac{2(x - x_0)}{g}} = \sqrt{\frac{2 * (-36m)}{9.81\, m/s^2}} = 2.7\, s$$

De la primera ecuación, la velocidad de impacto es

$$v = 0 - gt = -\frac{9.81m}{s^2} * 2.7s = -26m/s$$

Nota: Recuerde que el signo de la velocidad o aceleración le indica dirección de la velocidad o la aceleración. Por ejemplo, el resultado v=26 m/s significa que el movimiento del buzo es opuesto a la dirección del eje x; La x se dirige hacia arriba, y el movimiento del buzo se dirige hacia abajo.

Ejemplo 2.
Un arco poderoso, como uno de los utilizados para establecer registros mundiales en tiro con arco, puede lanzar una flecha a una velocidad de 90 m/s. ¿Hasta qué punto se elevará tal flecha si se apunta verticalmente hacia arriba? ¿Cuánto tiempo tardará en volver al suelo? ¿Cuál será su velocidad cuando llegue al suelo? Por simplicidad, ignorar la fricción del aire y tratar la flecha como una partícula ideal.
SOLUCIÓN: En el suelo, la velocidad inicial es positiva, v0 = 90 m/s la flecha se mueve hacia arriba mientras su velocidad disminuye a la velocidad de 9.81 m/s². En el punto más alto del movimiento, la flecha deja de moverse hacia arriba y está momentáneamente en reposo; En este punto la velocidad instantánea es cero, v=0. Por el movimiento ascendente, podemos considerar las velocidades inicial y final como conocidas. Se desconoce la altura alcanzada y el tiempo:
En la tercera ecuación, dividimos entre -g, encontramos que

$$(x - x_0) = \frac{1}{-2g}(v^2 - v_0^2) = \frac{-0 + (90m/s)^2}{2 * 9.81m/s^2} = 4.1X10^2m$$

El movimiento hacia abajo es simplemente el reverso del movimiento ascendente durante movimiento hacia abajo, la flecha se acelera a una velocidad de 9,81 m / s2, tal desacelerado a esta misma velocidad durante el movimiento ascendente. El movimiento descendente por lo tanto, toma exactamente el tiempo que el movimiento hacia arriba, y el tiempo total requerido para que la flecha complete el movimiento hacia arriba y hacia abajo es el doble del tiempo requerido para el movimiento ascendente, es decir, 2*9.2 =18.4 s. La velocidad de la flecha cuando golpea el suelo es simplemente el reverso de la velocidad inicial; Por lo tanto, es - 90 m/s.

Bibliografía.

Ohanian, Physics for Engineers and Scientits, Third edition Volumen 1.

Trabajo

Para introducir la definición del trabajo que hace una fuerza, se empieza con el sencillo caso del movimiento por una línea recta, con la fuerza a lo largo de la línea del movimiento. Considere una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, por ejemplo el eje x, y suponga que una fuerza constante F_x dirigida a lo largo de la misma línea recta actúa sobre una partícula. Entonces el trabajo realizado por la fuerza F_x en la partícula cuando ésta se mueve en alguna distancia dada se define como el producto de la fuerza y el desplazamiento Δx:

$$W = Fx\ \Delta x$$

La siguiente ecuación define al trabajo que realiza una de las fuerzas que actúan sobre una partícula. Si varias fuerzas actúan, entonces la ecuación puede usarse para calcular el trabajo que realiza cada fuerza. Si se suman las cantidades de trabajo que realizan todas las fuerzas que actúan sobre una partícula, se obtiene la cantidad neta de trabajo que hacen todas estas fuerzas juntas. Esta cantidad neta de trabajo puede calcularse directamente a partir de la fuerza neta:

$$w = Fneta, x\ \ \Delta x$$

En el sistema internacional, la unidad de trabajo es el joule, que es el trabajo que realiza una fuerza de 1 N durante un desplazamiento de 1m así:

1 joule= 1J=1N·m

Sección 1: La notación estándar para el producto punto consiste en los dos símbolos de los vectores separados por un punto:

A·B= cos θ

De acuerdo con esto, la expresión $w = Fs\cos\theta$ para el trabajo puede escribirse como el producto punto del vector de fuerza F y el vector de desplazamiento **S**:

$$W = F{\cdot}s$$

En la sección 1 se encontró que el producto punto es también igual a la suma de los productos de las componentes correspondientes de los dos vectores, o:

$$A{\cdot}B = Ax\,Bx + Ay\,By + Az\,Bz$$

Si las componentes de F son Fx, Fy, Fz y los de **s** son $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, la segunda versión del producto punto significa que el trabajo puede escribirse

$$w = Fx\Delta x + Fy\Delta y + Fz\Delta z$$

Observar que, aunque esta ecuación expresa el trabajo como una suma de contribuciones de las componentes x, y, z de la fuerza y el desplazamiento, el trabajo no tiene componentes separadas. Los 3 términos del lado derecho son simplemente tres términos de una suma. El trabajo es una cantidad escalar de una sola componente, no una cantidad vectorial.

Trabajo Realizado por Fuerza Variable

Si tenemos una partícula que realiza una trayectoria arbitraria, sometida a una fuerza variable con la posición o el tiempo, podemos hallar el trabajo dividiendo el camino en diferenciales casi rectilíneos, calculando el trabajo (diferencial) en cada uno, y sumando (integrando) el resultado.

El trabajo diferencial es igual a

$$\delta W = \vec{F}{\cdot}d\vec{r}$$

A partir de aquí obtenemos el trabajo realizado sobre una partícula que se mueve desde un punto A a un punto B recorriendo una curva C como la suma de los trabajos elementales a lo largo de dicha curva

$$Wa \to b = \int_a^b \delta W \; = \int_a^b \vec{F}{\cdot}d\vec{r}$$

Respecto a la notación, el hecho de que el trabajo diferencial (que no diferencial de trabajo) se represente como δW en lugar de dW se debe justamente al hecho de que es una cantidad que depende del camino, como se estudia en más detalle en Termodinámica.

Energía cinética

Cuando un cuerpo se mueve, tiene la **capacidad de transformar** su entorno. Esta capacidad de producir transformaciones constituye en Física el **concepto de energía**. Por ejemplo, cuando un cuerpo en movimiento choca con otro, se modifica el estado de reposo o movimiento de ambos. Por ello decimos que el primer cuerpo tenía energía: tenía la capacidad de producir transformaciones. A esta **energía debida al movimiento** se le denomina **energía cinética**. Vamos a estudiarla.

Definimos la **energía cinética** como aquella que posee un cuerpo por el hecho de *moverse*. Su valor viene dado por:

$$Ec = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Dónde:

- Ec: Es la *energía cinética* del cuerpo en movimiento. Su unidad de medida en el Sistema Internacional es el Julio (J)
- m: *Masa* del cuerpo en movimiento. Su unidad de medida en el Sistema Internacional es el Kilogramo (Kg)
- v: *Valor de la velocidad* del cuerpo en movimiento. Su unidad de medida en el Sistema Internacional es el metro por segundo (m/s)

Potencia

Es la magnitud física escalar que caracteriza o mide la rapidez con que el cuerpo realiza trabajo o intercambia energía con otro cuerpo. se dice que existe una potencia mecánica de un watt cuando se realiza un trabajo de un joule por segundo:

$$1W = 1\,J/s$$

El hombre siempre ha buscado realizar su trabajo en el menor tiempo posible, de ahí la necesidad de introducir un nuevo concepto que señale claramente con qué rapidez se hace un trabajo, este concepto recibe el nombre de potencia. Por definición: Potencia mecánica es la rapidez con que se realiza un trabajo. Su expresión matemática es:

$$P = \frac{W}{t}$$

Dónde P es la potencia, W el trabajo y t el tiempo.

La potencia mecánica es la potencia transmitida mediante la acción de fuerzas físicas de contacto o elementos mecánicos asociados como palancas, engranajes, etc. El caso más simple es el de una partícula libre sobre la que actúa una fuerza variable. De acuerdo con la mecanica clásica, el trabajo neto realizado sobre la partícula es igual a la variación de su energía cinética (energía de movimiento), por lo que la potencia desarrollada por la fuerza es:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F \cdot v$$

M es la masa de la partícula. F es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. V es la velocidad de la partícula

CAPITULO 5

2. Fuerza y Movimiento: *Las Leyes de Newton.*

2.3 Diferentes tipos de fuerzas

La primera ley de Newton puede definir a la fuerza como **aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto.**

Cuando un resorte se jala, el resorte se estira. Cuando se jala un carrito estacionario, el carrito se mueve. Cuando se patea un balón, se deforma y se pone en movimiento. Estas situaciones son ejemplos de una clase de fuerzas llamadas *fuerzas de contacto* (figura 1). Esto es, implican contacto físico entre dos objetos. Otras fuerzas de contacto son la fuerza que ejercen las moléculas de gas sobre las paredes de un contenedor y la fuerza que ejerce su pie sobre el suelo.

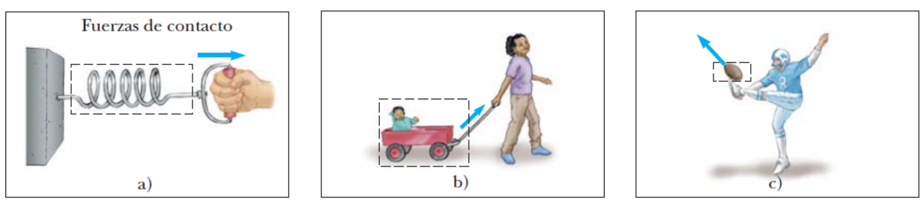


Figura 1. Fuerzas de Contacto

Otra clase de fuerzas, conocidas como *fuerzas de campo* (figura 2), no involucran contacto físico entre dos objetos. Estas fuerzas actúan a través del espacio vacío. La fuerza gravitacional de atracción entre dos objetos con masa, es un ejemplo de esta clase de fuerza. La fuerza gravitacional mantiene a los objetos ligados a la Tierra y a los planetas en órbita alrededor del Sol. Otra fuerza de campo común es la fuerza eléctrica que una carga eléctrica ejerce sobre otra. Como ejemplo, estas cargas pueden ser las del electrón y el protón que forman un átomo de hidrógeno. Un tercer ejemplo de fuerza de campo es la fuerza que un imán de barra ejerce sobre un trozo de hierro.

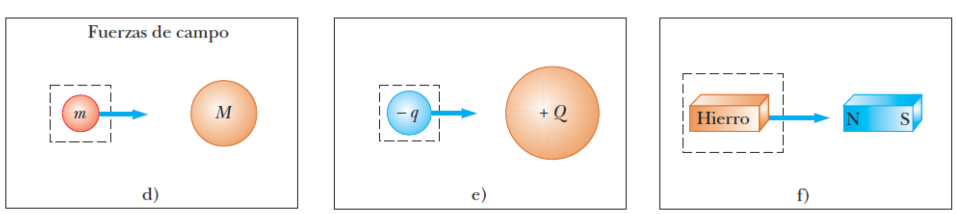


Figura 2. Fuerzas de campo

Las únicas fuerzas fundamentales conocidas en la naturaleza son todas fuerzas de campo: las fuerzas gravitacionales entre objetos, las fuerzas electromagnéticas entre cargas eléctricas, las fuerzas fuertes entre partículas subatómicas y las fuerzas débiles que surgen en ciertos procesos de decaimiento radiactivo.

Debido a que se ha comprobado experimentalmente que las fuerzas se comportan como vectores, deben aplicarse las reglas de suma vectorial para obtener la fuerza neta ejercida sobre un objeto.

La unidad del Sistema Internacional de fuerza es el **Newton** (N). Una fuerza de 1 N es la fuerza que, cuando actúa sobre un objeto de 1 kg de masa, produce una aceleración de 1 $\frac{m}{s^2}$. Por lo tanto: $1\,N = 1\,kg \cdot \frac{m}{s^2}$. Mientras que, en el sistema inglés, la unidad de fuerza es la libra (lb). Una fuerza de 1 lb es la fuerza que, cuando actúa sobre una masa de 1 slug, produce una aceleración de 1 $\frac{ft}{s^2}$. Aproximadamente $1\,N \approx \frac{1}{4}\,lb$.

2.3.1 Fuerza de fricción

Cuando un objeto está en movimiento ya sea sobre una superficie o en un medio viscoso como aire o agua, existe resistencia al movimiento porque el objeto interactúa con su entorno. A tal resistencia se le llama fuerza de fricción. Las fuerzas de fricción son muy importantes en la vida cotidiana. Permiten que uno camine o corra y son necesarias para el movimiento de los vehículos con ruedas.

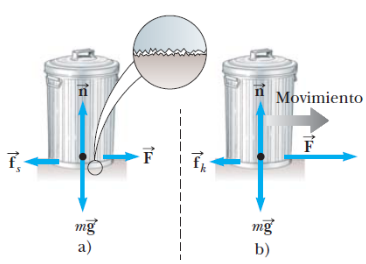


Figura 3. Bote de basura sobre una superficie con fricción

Por ejemplo, cuando se jala un bote de basura, la dirección de la fuerza de fricción $\vec{f}$, entre el bote y una superficie rugosa es opuesta a la dirección de la fuerza aplicada $\vec{F}$. Puesto que ambas superficies son rugosas, el contacto sólo se realiza en algunos puntos. Para pequeñas fuerzas aplicadas, la magnitud de la fuerza de fricción estática es igual a la magnitud de la fuerza aplicada. Mientras que, cuando la magnitud de la fuerza aplicada supera la magnitud de la fuerza máxima de fricción estática, el bote de basura queda libre. La fuerza aplicada ahora es mayor que la fuerza de fricción cinética y el bote puede acelerar hacia la dirección de la fuerza aplicada.

Si se aplica una fuerza horizontal externa $\vec{F}$ al bote de basura, que actúa hacia la derecha, el bote de basura permanece fijo cuando $\vec{F}$ es pequeña. La fuerza sobre el bote de basura que contraataca $\vec{F}$ y evita que se mueva actúa hacia la izquierda y se llama **fuerza de fricción estática** $\vec{f_s}$. Los experimentos muestran que la fuerza de fricción surge de la naturaleza de las dos superficies: debido a su rugosidad, el contacto se realiza sólo en unas cuantas posiciones donde se tocan los picos del material. En dichas posiciones, la fuerza de fricción surge en parte porque un pico físicamente bloquea el movimiento de un pico de la superficie opuesta y en parte por el enlace químico de picos opuestos conforme entran en contacto. Aunque los detalles de la fricción son muy complejos al nivel atómico, esta fuerza involucra, a final de cuentas, una interacción eléctrica entre átomos o moléculas.

Si se aumenta la magnitud de $\vec{F}$, el bote de basura al final se desliza. Cuando el bote de basura está a punto de deslizarse, f_s tiene su valor máximo $f_{s_{máx}}$, como se muestra en la figura 4. Cuando la Fuerza ejercida supera la fuerza de fricción, el bote de basura se mueve y acelera. A la fuerza de fricción para un objeto en movimiento se le denomina **fuerza de fricción cinética** $\vec{f_k}$. La fuerza de fricción estática máxima, siempre es mayor que la fuerza de fricción cinética, como se ilustra en la figura 4.

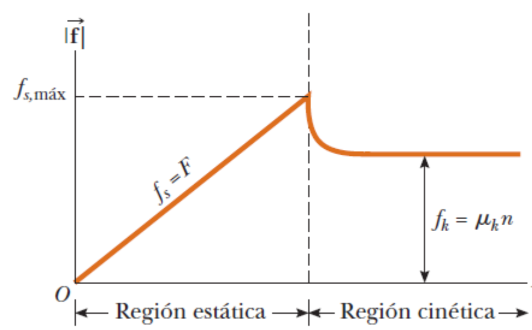


Figura 4. Gráfica de fuerza de fricción en función de la fuerza aplicada

La magnitud de la fuerza de fricción estática entre dos superficies en contacto tiene los valores:

$$f_s \leq \mu_s n \qquad [1]$$

donde la constante adimensional μ_s se llama **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal que ejerce una superficie sobre la otra.

La magnitud de la fuerza de fricción cinética que actúa entre dos superficies es:

$$f_k = \mu_k n \qquad [2]$$

donde μ_k se llama **coeficiente de fricción cinética**. Aunque el coeficiente de fricción cinética varía con la rapidez.

Los valores de μ_s y μ_k dependen de la naturaleza de las superficies, pero μ_k por lo general es menor que μ_s. El intervalo de los valores fluctúa de 0 a 1.

La dirección de la fuerza de fricción sobre un objeto es paralela a la superficie con la que el objeto está en contacto y opuesta al movimiento real (fricción cinética) o al movimiento inminente (fricción estática) del objeto en relación con la superficie.

Problemas

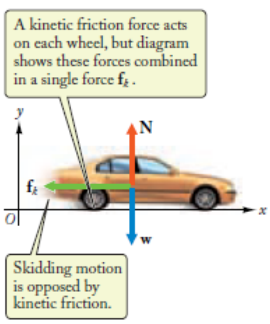


Figure 5. Esquema del problema 2.3.1.a

2.3.1.a Supongamos que el coeficiente de fricción de las llantas de un automóvil desplazándose sobre el pavimento de una calle es de $\mu_k = 0.8$. ¿Cuál es la desaceleración de un automóvil en una calle plana, si el conductor frena bruscamente, para que todas las llantas estén bloqueadas y derrapen? (Asuma que el vehículo es un modelo económico sin un sistema de frenos antibloqueo)

Solución

La figura 5 muestra el diagrama del cuerpo libre con las fuerzas sobre el automóvil. Estas fuerzas son: el peso **w**, la fuerza normal **N** ejercida por la calle y la fuerza de fricción f_k. La fuerza normal debe de balancearse con el peso; por lo tanto, la magnitud de la fuerza normal es la misma que la magnitud del peso o $N = w = mg$. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza de fricción debe de ser:

$$f_k = \mu_k N = 0.8 \times mg$$

Como la fricción es la única fuerza horizontal en el automóvil, la desaceleración del automóvil a lo largo de la calle es:

$$a_x = -\frac{f_k}{m} = -\frac{0.8 \times mg}{m} = -0.8 \times g = -0.8 \times 9.81 \frac{m}{s^2}$$

$$a_x = -8\frac{m}{s^2}$$

2.3.2 Fuerza gravitatoria

Todos los objetos son atraídos hacia la Tierra. La fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un objeto se llama fuerza gravitacional $\overrightarrow{F_g}$. Esta fuerza se dirige hacia el centro de la Tierra (ignorando que la distribución de masa de la Tierra no es perfectamente esférica) y su magnitud se llama peso del objeto.

Al aplicar la segunda ley de Newton ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$) a un objeto en caída libre de masa m, con $\vec{a} = \vec{g}$ y $\sum \vec{F} = \overrightarrow{F_g}$, obtenemos que el peso de un objeto, al definirse como la magnitud de la fuerza gravitacional, es igual a la masa del objeto multiplicado por la gravedad.

$$F_g = peso = mg \qquad [3]$$

El valor de g variará de un planeta a otro, pero la magnitud de la fuerza gravitacional siempre será conocida por el valor de mg.

La ley de Newton de la gravitación universal afirma que toda partícula en el Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

Si consideramos a las partículas de masa m_1 y m_2 que están separadas por una distancia r, la magnitud de la fuerza gravitacional es:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad [4]$$

Donde G es una constante llamada *constante gravitacional universal*. Su valor en unidades el Sistema Internacional es de $6.673 \times 10^{-11}\, N \cdot \frac{m^2}{kg^2}$.

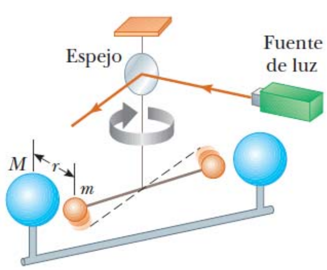


Figura 6. Aparato de Cavendish para medir G

Henry Cavendish (1731-1810) midió la constante gravitacional universal en un importante experimento de 1798. El aparato de Cavendish consistió en dos pequeñas esferas, cada una de masa m, fijas en los extremos de una barra horizontal, ligera suspendida de una fibra fina o alambre metálico delgado (figura 6). Cuando dos esferas grandes, cada una de masa

M, se colocan cerca de las más pequeñas, la fuerza de atracción entre las esferas pequeñas y grandes hace que la barra gire y contorsiona el alambre de suspensión a una nueva orientación de equilibrio. El ángulo de rotación se mide por la desviación de un haz de luz reflejado de un espejo unido a la suspensión vertical.

La fuerza gravitacional es una fuerza de campo que siempre existe entre dos partículas, sin importar el medio que las separe. Ya que la fuerza varía según el cuadrado inverso de la distancia entre las partículas, disminuye rápidamente con separación creciente.

La fuerza gravitacional que ejerce una distribución de masa esféricamente simétrica y de tamaño finito sobre una partícula afuera de la distribución es la misma como si toda la masa de la distribución se concentrara en el centro.

Los hoyos negros son restos de estrellas que colapsaron bajo su propia fuerza gravitacional. Si un objeto como una nave espacial se acerca a un hoyo negro, el objeto se somete a una fuerza gravitacional extremadamente intensa y queda atrapado para siempre.

Problemas

<u>2.3.2.a</u> ¿Cuál es la fuerza gravitacional entre un hombre de 70 kg y una mujer de 70 kg separados por una distancia de 10 m? Toma ambas masas como partículas.

Solución

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

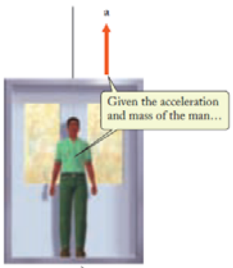
$$= \frac{\left[\left(6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)(70\,kg)(70\,kg)\right]}{(10m)^2} = 3.3 \times 10^{-9} N$$

2.3.3 Fuerza Normal, Tensión, etc.

La fuerza normal representa la resistencia que los cuerpos solidos ofrecen a la interpenetración. Cuando intentas empujar a dos cuerpos junto, sus superficies empiezan a repelerse tan pronto como entran en contacto. Puedes sentir este tipo de fuerza de contacto repulsivo cuando empujas tu mano o tu pie en contra de una superficie sólida. En este caso, cuando empujas con tu mano horizontalmente a la pared puedes sentir como la pared empuja contra tu mano, impidiendo que tu mano atraviese la pared. Este empuje de la pared se llama fuerza normal, se llama "normal" debido a que es perpendicular a la pared. Esta fuerza normal surge del contacto entre los átomos de tu mano y los átomos de la pared, estos átomos ejercen fuerzas repulsivas sobre los demás, lo cual se opone a su interpenetración.

Cuando una soga unida a un objeto jala sobre el objeto, la soga ejerce una fuerza $\vec{T}$ sobre el objeto en una dirección que se aleja del objeto, paralela a la soga. La magnitud T de dicha fuerza se llama tensión en la soga. Puesto que es la magnitud de una cantidad vectorial, la tensión es una cantidad escalar.

Problemas:



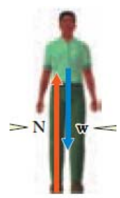


Figure 7. Diagrama del problema

<u>2.3.3.a</u> Un hombre con una masa de 75 kg está parado en un elevador el cual está acelerando hacia arriba a 2 m/s^2. ¿Cuál es la fuerza normal que ejerce el piso del elevador sobre el hombre? ¿Cuál es la fuerza normal que el hombre ejerce sobre el piso?

Solución

Las dos fuerzas del hombre son su peso y la fuerza normal, aunque solo tenemos que considerar las fuerzas verticales, por lo tanto, la Fuerza neta del hombre es:

$$F_{net} = N - mg$$

Donde las fuerzas son positivas, en la dirección hacia arriba. Como la fuerza neta le da al hombre una aceleración a, la segunda ley de Newton nos dice que:

$$ma = N - mg \qquad \text{o} \qquad N = ma + mg$$

Sustituyendo los datos tenemos que:

$$N = (75kg)\left(2\frac{m}{s^2}\right) + 75kg\left(9.81\frac{m}{s^2}\right) = 150\,N + 736\,N = 886\,N$$

Esta fuerza, es la fuerza normal que ejerce el piso del elevador sobre el hombre.

Conforme a la Tercera ley de Newton, la fuerza normal de reacción que el hombre ejerce sobre el piso del elevador tiene la misma magnitud de 886 N, debido a que las fuerzas normales en el elevador y el hombre forman un par de fuerzas de acción-reacción.

2.3.3.b La aceleración de un bloque largo de masa m_1 sobre una rampa sin fricción se mantiene pequeña al colgar un contrapeso de masa m_2; los dos están conectados a través de una polea sin fricción como se muestra en la figura 8. El ángulo de inclinación es de 15°. Si la aceleración deseada es de una centésima parte del valor estándar de la gravedad g, ¿cuál debería de ser la masa m_2 del contrapeso?

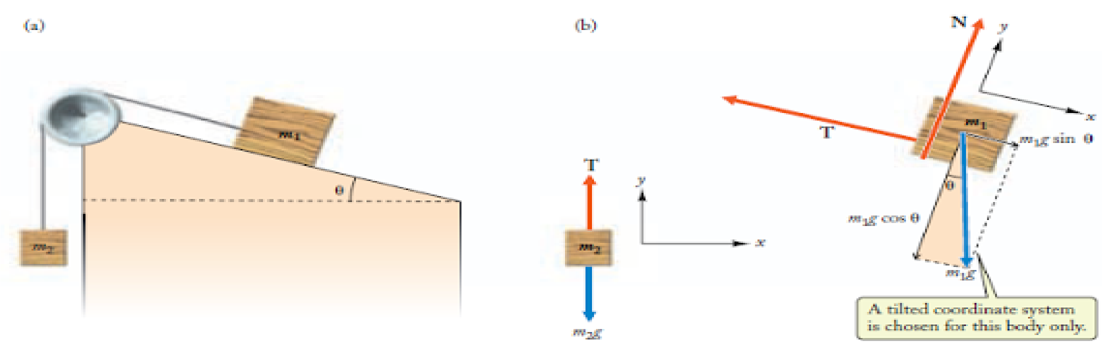


Figure 8. Diagrama del problema 2.3.3.b

Solución

Los diagramas de cuerpo libre de las dos masas se muestran en la figura 7. Es conveniente usar como el eje de coordenadas del plano inclinado para la masa 1. Las componentes en el eje x y y de la ecuación de movimiento de la masa 1 son:

$$m_1 a_{1,x} = m_1 g\, sin\theta - T \qquad [a]$$

$$m_1 a_{1,y} = N - mg$$

Como la pregunta del problema no pregunta sobre la fuerza normal, no necesitaremos la segunda ecuación. Para la masa colgante m_2, usamos eje +y y solo tenemos fuerzas verticales, por lo tanto:

$$m_2 a_2 = T - mg \qquad [b]$$

Las aceleraciones ligadas deben de tener la misma magnitud debido a que están conectadas por a la misma cuerda, esto es:

$$a_{1,x} = a_{2,y} \qquad [c]$$

Usando la ecuación *c* en la ecuación *b* y añadiéndola a la ecuación *a*, podemos eliminar la tensión:

$$m_1 a_{1,x} + m_2 a_{1,x} = m_1 g sin\theta - m_2 g$$

Juntando los términos de m_2 al lado izquierdo, obtenemos que:

$$m_2(a_{1,x} + g) = m_1 g sin\theta - m_1 a_{1,x}$$

Lo cual lo podemos resolver para m_2

$$m_2 = m1\left[\frac{g\ \sin\theta - \ a_{1,x}}{a_{1,x}\ \ +\ g}\right]$$

Finalmente, sustituimos el valor deseado de la aceleración ($a_{1,x} = 0.01g$), cancelando el término común de g, y evaluando el resultado para $\theta = 15°$:

$$m_2 = m1\left[\frac{g\ \sin\theta - \ 0.01\mathrm{g}}{0.01g\ \ +\ g}\right]$$

$$m_2 = m1\left[\frac{\sin(15) - 0.01}{1.01}\right]$$

$$m_2 = m1\left[\frac{0.26 - 0.01}{1.01}\right]$$

$$m_2 = 0.25\, m_1$$

Fuentes

- Serway & Jewett (2008), *Física para ciencias e ingeniería*, volumen 1, Séptima edición. Editorial CENGAGE Learning. ISBN-13: 978-607-481-357-9 ISBN-10: 607-481-357-4
- Ohanian & Markert (2007), *Physics for engineers and scientists*, volumen 1, Tercera edición, editorial W.W. Norton & Company, Inc., ISBN 978-0-393-11101

5.4 Peso; Fuerza de contacto y fuerza normal

La gravedad de la tierra es la más familiar de la fuerzas. Cuando usted sostiene un cuerpo en sus manos, por ejemplo una manzana, puede sentir el tirón hacia debajo de la gravedad sobre la manzana; y si la suelta, puede verla acelerando bajo la influencia de este tirón. En la terminología de la física, la atracción de la gravedad sobre un cuerpo se llama peso del cuerpo. Asi el peso es una fuerza; es una cantidad vectorial: tiene dirección (descendente) así como una magnitud. La unidad de peso es la unidad de fuerza; es decir, el Newton (N).

La magnitud de la fuerza del peso es directamente proporcional a la masa del cuerpo.

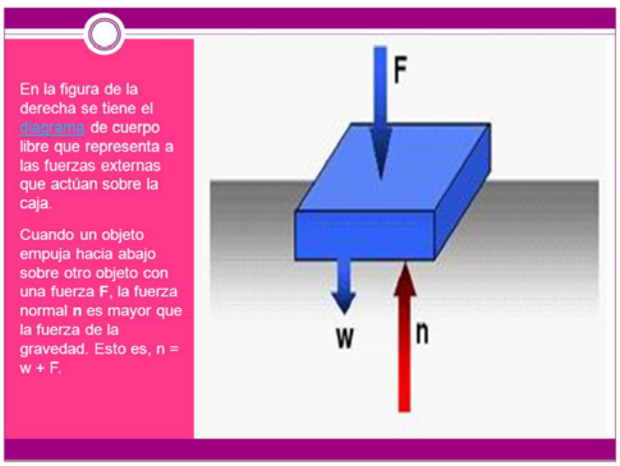
$F = ma = mg$

El peso se designa con el símbolo vectorial $\boldsymbol{w}$. De acuerdo con la ecuación $F = ma = mg$, la magnitud del peso es

$w = mg$

Fuerza Normal

Es la fuerza que produce una superficie que evita la interpenetración de cuerpos sólidos. La fuerza normal tiene una dirección perpendicular hacia afuera de la superficie y, si la superficie no está acelerando, una magnitud que equilibra la fuerza neta que empuja perpendicularmente hacia la superficie.



Tercera ley de Newton

Siempre que un cuerpo ejerza una fuerza sobre elk itri cyeroi, este ultimo ejerce sobre el primero una fuera de igual magnitu y de sentido opuesto. Estos pares de *acción-reacción* de fuerza no ¨se cancelan¨, ya que *actúan sobre cuerpos diferentes*.

$$F_{1\,en\,2} = -F_{2\,en\,1}$$

Diagrama de cuerpo libre

Un diagrama que muestra un cuerpo en forma aislada y cada uno de los vectores de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo.

Tensión

La fuerza con la cual una cuerda, reata o cable tira de aquello a lo que este atado. Para una cuerda, reata o cable sin masa, la magnitud de la tensión e la misma en cada punto, aunque pase alrededor de una polea sin masa con movimiento libre

Ejemplo 5

¿Cuál es el peso de una mujer de 54 kg ? suponga que $g = 9.81\ {}^{m}/_{s^2}$.

Solución: Por la ecuación $w = mg$ la magnitud del peso es

$w = mg = 54\,kg \ \ \text{x}\, 9.81\,{}^{m}/_{s^2} = 530\,N$

Y su dirección es hacia abajo

Comentario: como el valor de g depende de la ubicación, el peso de un cuerpo también depende de su ubicación. Por ejemplo, si la de una mujer de 54 kg viaja de Londres($g = 9.81\,{}^{m}/_{s^2}$) a hong Kong ($g = 9.81\,{}^{m}/_{s^2}$), si peso disminuirá de 530 N a 529 N, una diferencia de 1 N. y si esta mujer viajara a la luna ($g = 1.62\,{}^{m}/_{s^2}$), supeso disminuiría a ¡87 N!

Ejemplo 6

Un hombre con masa de 75.0 kg esta de pie en un ascensor que acelera hacia arriba a 2.00${}^{m}/_{s^2}$ ¿Cuál es la fuerza normal que el piso del ascensor ejerce sobre el hombre? ¿Cuál es la fuerza normal que el hombre ejerce sobre el piso?

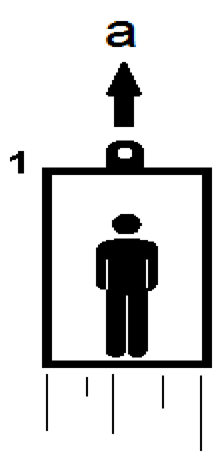


Figura 1. Un hombre de pie en un ascensor que acelera hacia arriba.

Dadas la aceleración y la mas del hombre…

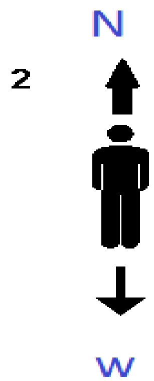


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre

N

-las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo son la fuerza normal N que ejerce el piso

W

Y el peso w que ejerce la tierra

Solución

Las dos fuerzas sobre el hombre son su peso y la fuerza normal; por tanto, debe considerarse solamente las fuerzas verticales. Estas Fuerzas se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la figura. La fuerza neta sobre el hombre es:

$$F_{neta} = N - mg$$

Donde las fuerzas se consideran como positivas cuando se dirigen hacia arriba. Como la fuerza neta F_{neta} le da al hombre una aceleración a, la segunda ley de newton dice:

$$ma = N - mg$$

O

$$N = ma + mg$$

Por tanto

$$N = 75.0\ kg\ x\ 2.00\ {}^{m}/_{s^2} + 75.0\ kg\ \ x\ 9.81\,{}^{m}/_{s^2} = 150\ N + 736\ N = 886\ N$$

Asi, la fuerza normal sobre el hombre es mayor a su peso, por 150 N. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza normal de reacción que el hombre ejerce hacia abajo sobre el piso del ascensor tiene la mima magnitud, también de 886 N, ya que las fuerzas normales sobre el ascensor y sobre el hombre forman un par de acción-reacción. Si el hombre estuviera parado sobre una bascula de resortes (bascula de baño), la bascula registraría este peso mayo de 886 N, como si la gravedad hubiera aumentado y la bascula indicaría una lectura de

$$\frac{(886\,N)}{9.81\,{}^{m}/_{s^2}} = 90\,kg$$

En vez de 75 kg. Observe que el sentido de la velocidad del ascensor es irrelevante solo importa el sentido de la aceleración. Si el ascensor estuviera bajando y frenara el resultado seria el mismo.

Ejemplo 7

Un remolcador tira una barcaza con masa de 50 000 kg por medio de un cable(véase la figura). Si el remolcador ejerce una fuerza horizontal de 6 000 N en el cable, ¿Cuál es la aceleración del cablem y de la barcaza? ¿Cuál es lamagnitud de la fuerza que el cable ejerce en la barcaza? Suponga que la masa del cable puede despreciarse(es decir, suponga que el cable prácticamente no tiene masa) e ignore la friccion del agua agua en la barcaza.

Figura 1. Un remolcador jala una barcaza

Solución

Antes de dibujar el diagrama de cuerpo libre, debe decidirse cuál es el cuerpo. Podría considerarse la barcaza como el cuerpo, o el cable o ambos. Como la barcaza y el cable aceleran juntos , lo mejor será tomar la barcaza y el cable en conjunto como el cuerpo. El diagrama de cuerpo libre para este cuerpo se muestra en la figura 2 de este ejemplo (solo se han incluido las fuerzas horizontales en este diagrama). La fuerza de 6 000 N que ejerce el remolcador acelera tanto en el cable como en barcaza; es decir, acelera una masa de 50 000 kg. Por tanto, la aceleración resultante es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{6\,000\,N}{50\,000\,kg} = 0.12\,{}^{m}/_{s^2}$$

Por la tercera ley de Newton, la fuerza del cable sobre la barcaza tiene la misma magnitud que la fuerza de la barcaza sobre el cable. Para hallar esta magnitud, puede examinarse el diagrama de cuerpo libre para la barcaza o para el cable. Se elige el cable; el diagrama de cuerpo libre para este cuerpo se muestra en la figura 3. El remolcador tira del extremo frontal del cable con una fuerza de 6 000 N y la barcaza tira del extremo posterior del vable. Para un cable de masa cero, lafuerza neta sobre el cable debe ser cero (para un cuerpo de masa cero

$$F = ma = 0\,x\,a = 0$$

Por tanto, la fuerza de la barcaza en el extremo posterio del vable debe igualar a la fuerza del rempolcador en el extremo frontal: ambas fuerzas deben ser de 6 000 N. La tercera ley de Newton exige entonces que el cable tire de la barcaza con una fuerza de 6 000 N.

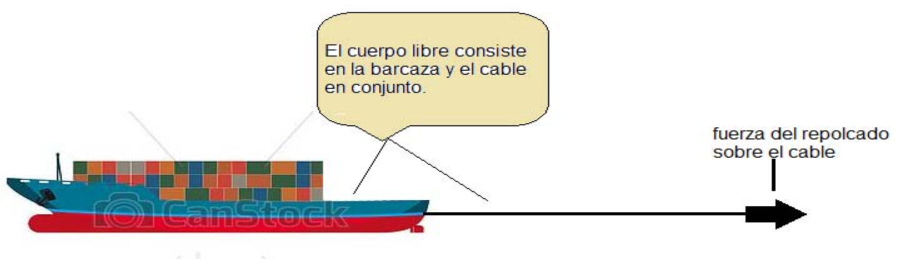


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre para la barcaza y el cable.

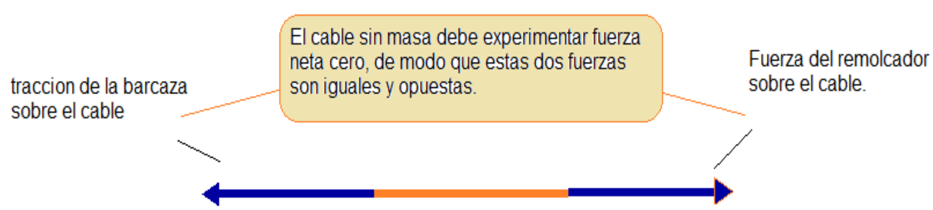


Figura 3. Diagrama de cuerpo libre para las fuerzas que actúan en el cable en el que muestran tanto las fuerzas externas ejercidas por el remolcador como las ejercidas por la barcaza.

Ejemplo 8

La figura 1 muestra un aparato de tracción que se usa en los hospitales para ejercer una tracción constante en una pierna rota, con objeto de mantener alineados los huesos. La polea media está atada a la escayola y las otras dos poleas están atadas a la cama o a la pared. Un alambre flexible pasa sobre estas poleas y un ladrillo que cuelga de este alambre proporciona tensión. Las proporciones de la polea media, a ángulos de 35° con respecto a la horizontal. Si la tracción horizontal sobre la pierna hade ser de 50 N ¿Qué tensión debe dar el ladrillo en el extremo del cable?

Solución:

Como se explicó arriba, la tensión es constante a lo largo de todo el alambre. Si la magnitud de la tensión en el extremo inferior del alambre es T, la magnitud de la tensión en todos los demás puntos del alambre también debe de ser T. Bajo condiciones estáticas, las proporciones superior e inferior del alambre pueden considerarse como fijas a la polea media en los puntos del primer contacto. Así, la porción superior del alambre tira hacia arriba a un ángulo de 35° con una fuerza T_1 de magnitud T y la parte inferior tira hacia abajo a un angulo de 35° con una fuerza T_2 de la misma magnitud.

La figura 2ª muestra estas fuerzas para $T_1\, y\, T_2$ que ejerce el alambre sobre la polea media. El eje x es horizontal y el eje y es vertical. Las componentes verticales de estas fuerzas se cancelan, ya que tienen signos opuestos y magnitudes iguales. Las componentes horizontales se sumas, puesto que tienen signos positivos. La fuerza resultante que ejerce el alambre sobre la polea media es, por tanto, en la dirección horizontal, es decir, en la dirección x.

Las componentes $T_1\, y\, T_2$ en la dirección x son $T\cos 35°$ (véase la figura 3b).

Por tanto, la componente en x de la fuerza resultante es

$$F_x = T_{1.x} + T_{2,x} = T\cos 35° = 2T\cos 35°$$

Como la magnitud de F_x se supone que son de 50 N, se obtiene

$$T = \frac{F_x}{2\cos 35°} = \frac{50\,N}{2\times 0.819} = 31\,N$$

Por tanto, el ladrillo debe proporcionar una tensión de **31 N.**

Ejemplo 9

La figura 1 muestra un bloque de masa m deslizandose hacia abajo en un plano inclinado liso o rampa sin friccion, con un angulo de inclinacion θ con respecto a la dirección horizontal. Encuentre la magnitud de la fuerza normal que ejerce el plano sobre el bloque.

Solución:

Hay dos fuerzas que actúan sobre el bloque: el peso $\boldsymbol{w}$ en dirección vertical hacia abajo y la fuerza $\boldsymbol{N}$ en dirección perpendicular al plano inclinado. La figura 2ª muestra estas dos fuerzas en un diagrama de cuerpo libre. La fuerza neta que actúa sobre el bloque es la suma vectorial de $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{N}$. Para el calculo de las componentes de estas fuerzas, es conveniente tomar el eje x paralelo al plano inclinado y el eje y perpendicular a este; lo anterior simplifica el calculo del movimiento, ya que la velocidad y la aceleración quedan entonces a lo largo del eje x elegido. Con esta elección de ejes, se encuentra que las componentes de las dos fuerzas son:

$$N_x = 0 \qquad N_y = N$$

$$\omega_x = mg\ sen\ \theta \qquad \omega_y = -mg\cos\theta$$

Y las componentes de la fuerza neta son

$$F_x = N_x + \omega_x = mg\ sen\ \theta$$

$$F_y = N_y + \omega_y = -mg\ cos\ \theta$$

La ecuación de movimiento produce entonces las componentes correspondientes de la aceleración del bloque:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{mg\ sen\ \theta}{m} = g\ sen\ \theta$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{N - mg\cos\theta}{m}$$

La ecuacion

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{mg\ sen\ \theta}{m} = g\ sen\ \theta$$

Indica que la aceleración del bloque a lo largo del plano inclinado es de $g\,sen\,\theta$. En el caso de un plano horizontal ($\theta = 0\ y\ sen\,\theta$= 0), no hay aceleración. En el plano vertical ($\theta = 90°\ y\ sen\,\theta$= 1), la aceleración es de $a_x = g$, que es la aceleración de caída libre (con el eje x dirigido hacia abajo). Estos dos casos extremos son como se esperarían.

La ecuación

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{N - mg\cos\theta}{m}$$

Puede usarse para evaluar la fuerza normal. Como el movimiento es a lo largo del plano, la aceleración perpendicular al plano debe ser idénticamente cero, y asi

$$0 = \frac{N - mg\cos\theta}{m}$$

De aquí se encuentra

$$N = mg\cos\theta$$

Comentario:

Observe que en el caso de un plano horizontal ($\theta = 0$), la fuerza normal tiene una magnitud mg, es decir, la magnitud de una fuerza normal iguala al peso; en el caso de un plano vertical ($\theta = 90°$), la fuerza normal desaparece. Esto es razonable y podría haberse esperado.

Ejemplo 10

Un ascensor de pasajeros consiste en una caja de ascensor de 1 000 kg (vacía) y un contrapeso de 1 100 kg conectado por un cable que corre sobre una polea grande (véase la figura 1). Desprecie las masas del cable y la polea. a) ¿Cuál es la aceleración hacia arriba de la caja del ascensor si permite a la polea correr libremente, sin fricción? b) ¿Cuál es la tensión en el cable? c) ¿Cuáles son las tensiones en el cable si la polea se traba (por medio de un freno) de modo que el ascensor permanezca estacionario?

Solución:

a) como la caja del ascensor y el contrapeso están unidos por el cable, es necesario resolver las ecuaciones de movimiento de manera simultánea para estos dos cuerpos. Para la polea libre, el cable simplemente transmite la tensión de un cuerpo al otro, sin cambio de su magnitud; por consecuencia, las fuerzas de tensión hacia arriba que ejercen los extremos del cable en cada cuerpo son exactamente igual.

La figura 2 muestra los diagramas de cuerpo libre para la caja del ascensor y el contrapeso. Las masas de estos dos cuerpos se designan como m_1 y m_2, respectivamente. Para cada sistema consiste en varios cuerpos, como el sistema de dos cuerpos que se está considerando aquí, los diagramas de cuerpo libre son de especial ayuda, ya que permiten visualizar cada cuerpo en aislamiento, y producen una visión clara de lo que sucede a cada cuerpo individual. El vector $\boldsymbol{T}$ de la figura 2 representa la fuerza de tensión y w_1 y w_2 representan los pesos. Solo están presentes fuerzas verticales. Con el eje y y en dirección vertical, como se indica en la figura 2, la componente y de la fuerza que actúa sobre m_1 es $F_1 = T - \omega_1$, y la componente y de la fuerza en m_2 es $F_2 = T - \omega_2$. Por tanto, la ecuación para el movimiento vertical de cada masa es:

$$m_1 a_1 = F_1 = T - \omega_1$$

$$m_2 a_2 = F_2 = T - \omega_2$$

Donde las fuerzas y las aceleraciones se consideran como positivas cuando se dirigen hacia arriba. Como las dos masas que están unidas por un cable de longitud fija, sus aceleraciones a_1 y a_2 son siempre de la misma dirección y sentidos opuestos, es decir,

$$a_1 = -a_2$$

Con esta ecuación y con $\omega_1 = m_1 g$ y $\omega_2 = m_2 g$, se obtiene usando las ecuaciones

$$m_1 a_1 = F_1 = T - \omega_1$$

$$m_2 a_2 = F_2 = T - \omega_2$$

$$\boldsymbol{m_1 a_1 = T - m_1 g}$$

$$\boldsymbol{-m_2 a_1 = T - m_2 g}$$

Estas son dos ecuaciones simultaneas para las dos incógnitas a_1 y T. Para despejar primero a_1 de estas ecuaciones, puede eliminarse T restando cada miembro de la segunda ecuación de cada miembro de la primera:

$$m_1 a_1 - (-m_2 a_1) = T - m_1 g - (T - m_2 g)$$

Así se cancela la incógnita T, despejando una ecuación para a_1:

$$m_1 a_1 + m_2 a_1 = -m_1 g + m_2 g$$

Puede despejarse a_1 de esta ecuación, reordenándola:

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Con esta ecuación se obtiene la aceleración. Con $m_1 = 1\,000\,kg$ y $m_2 = 1\,100\,kg$ se encuentra

$$a_1 = \frac{1\,100\,kg - 1000\,kg}{1\,100\,kg + 1\,000\,kg} g = \frac{100}{2100} g$$

$$= 0.0476g = 0.0476 \times 9.81\, {}^{m}/_{s^2} = .0467\, {}^{m}/_{s^2}$$

El valor positivo de esta aceleración indica que la caja del ascensor se acelera hacia arriba, como podría haberse esperado, ya que tiene la menos masa. b) enseguida debe hallarse la tensión en el cable. sustituyendo el resultado para a_1 en la ecuación $m_1 a_1 = T - m_1 g$,se obtiene una ecuación para T:

$$m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = T - m_1 g$$

Y se obtiene

$$T = m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g + m_1 g = m_1 g \times (\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + 1)$$

$$= \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

Entonces la tensión en el cable, numéricamente, es

$$T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 1\,000\; kg\; \times 1\,100\; kg \times 9.81\, {}^{m}/_{s^2}}{1000\; kg + 1\,100\; kg}$$

$$= 1.03 \times 10^4 N$$

c)si la polea se traba y el ascensor permanece estacionario, la tensión en el cable a cada lado de la polea debe igualar el peso que cuelga en el lado respectivo. Así

$$T_1 = \omega_1 = m_1 g = 1\,000\; kg \times 9.81\, {}^{m}/_{s^2} = 9.81\; \times 10^3 N$$

Y

$$T_2 = \omega_2 = m_2 g = 1\,100\; kg \times 9.81\, {}^{m}/_{s^2} = 1.08\; \times 10^4 N$$

Comentario:

Como podría haberse esperado, la ecuación $a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$ muestra que si las dos masas m_1 y m_2 son iguales, la aceleración es cero: las dos masas están equilibrio y se mantienen en reposo o se mueven con velocidad uniforme (hasta que el cable termina).

Observe cuando las dos masas son desiguales y la polea está trabada, las tensiones en las dos partes del cable *no* son iguales. Esto se debe a que la polea trabada ejerce fuerzas adicionales de fricción sobre el cable y las dos porciones del cable se comportan ahora como si estuvieran suspendidas independientemente.

Ejemplo 11

La aceleración de un bloque grande de m_1 que baja por una rampa sin fricción debe conservarse pequeña usando un contrapeso suspendido de m_2; los dos cuerpos conectados, sobre una polea ligera y sin fricción, por una cuerda ligera como se muestra en la figura 1ª. El ángulo de la rampa es de$\theta = 15°$. Si la aceleración deseada es de una centésima de g estándar ¿Cuál debe ser m_2 del contrapeso?

Solución:

Los diagramas de cuerpo libre para las dos masas se muestran en la figura 1b. Es conveniente usar ejes de coordenadas inclinados para la masa m_1 en la rampa, como en el ejemplo 9, salvo que hay, además, la tensión $\boldsymbol{T}$ de la cuerda. Entonces, las componentes en x y las componentes y de la ecuación de movimiento de la mas m_1 son

$$m_1 a_{1,x} = m_1\ g\ sen\ \theta - T$$

$$m_1 a_{1,y} = N - m_1\ g\ cos\ \theta$$

La pregunta no pide la fuerza normal, de modo que no se necesitara la segunda ecuación. Para la masa suspendida en m_2, se usara un eje hacia arriba $+y$ y se tendrán solo fuerzas verticales, de modo que:

$$m_2 a_{2,y} = T - m_2 g$$

Como el ejemplo 10, observe las aceleraciones vinculadas deben tener la misma magnitud, ya que están conectadas por una cuerda tensa. Para las direcciones de los ejes, se obtiene:

$$a_{1,x} = a_{2,y}$$

Observe que la polea tiene movimiento vinculado en dos direcciones diferentes. El signo en la ecuación $a_{1,x} = a_{2,y}$, se elige como positivo, ya que el movimiento de m_1 a lo largo del eje x positivo. Usando la ecuación $a_{1,x} = a_{2,y}$ en la ecuación $m_2 a_{2,y} = T - m_2 g$ y luego sumando la ecuación $m_2 a_{2,y} = T - m_2 g$ y la ecuación $m_1 a_{1,x} = m_1\ g\ sen\ \theta - T$, puede eliminarse la tensión en T:

$$m_1 a_{1,x} + m_2 a_{1,x} = m_1\ g\ sen\ \theta - m_2 g$$

Resumiendo los términos de m_2 en el lado izquierdo, se obtiene:

$$m_2\left(a_{1,x} + g\right) = m_1 g\ sen\ \theta - m_1 a_{1,x}$$

De donde puede despejarse m_2:

$$m_2 = m_1 \frac{g\ sen\ \theta - a_{1,x}}{a_{1,x} + g}$$

Finalmente, se sustituye el valor deseado de $a_{1,x} = 0.01\,g$, se cancela el factor de g y se evalúa el resultado para $\theta = 15°$:

$$m_2 = m_1 \frac{g\ sen\ \theta - 0.01\ g}{0.01\ g + g}$$

$$= m_1 \frac{sen\ \theta - 0.01}{0.01}$$

$$= m_1 \frac{sen\ 15° - 0.01}{0.01} = m_1 \frac{.26 - 0.01}{0.01}$$

$$= .\boldsymbol{25 m_1}$$

1. Cantidad de Movimiento y sistema de partículas

1.1 Colisiones

Teoría

El término de colisión se emplea para representar la situación en la que dos o más partículas interaccionan durante un tiempo muy corto o instante. Se supone que las fuerzas impulsivas debidas a la colisión son mucho más grandes que cualquier otra fuerza externa presente.

Un choque suele medirse con un acelerómetro. Esto describe un choque de pulso, como una parcela de aceleración en función del tiempo. La aceleración se puede tomar en unidades de metro por segundo al cuadrado

El momento lineal total se conserva en las colisiones. Sin embargo, la energía cinética no se conserva debido a que parte de la energía cinética se transforma en energía térmica y en energía potencial elástica interna cuando los cuerpos se deforman durante la colisión.

Existen dos tipos de colisiones:

- Inelástica: es la colisión en la cual no se conserva la energía cinética. Cuando dos objetos que chocan se quedan juntos después del choque se dice que la colisión es perfectamente inelástica.

Por ejemplo: un coche que choca con un poste.

- Elástico: la energía cinética tanto como el momento lineal se conserva, por ende los objetos se deparan por la misma fuerza por la cual fueron colisionados.

Un ejemplo muy práctico y visible de este tipo de colisión podría ser al chocar las bolas de billar.

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1)^2 + \frac{1}{2}(m_2 v_2)^2 = \frac{1}{2}(m_1 u_1)^2 + \frac{1}{2}(m_2 u_2)^2 + Q$$

Donde:

M= masa en kg

V= velocidad en m/s

Q= variación entre la energía cinética antes y después de la colisión

La magnitud Q es la diferencia entre las energías cinéticas después y antes de la colisión. Q toma el valor de cero en las colisiones perfectamente elásticas, pero puede ser menor que cero si en el choque se pierde energía cinética como resultado de la deformación, o puede ser mayor que cero, si la energía cinética de las partículas después de la colisión es mayor que la inicial.

Posibles efectos de una colisión:

- Un cuerpo frágil se puede fracturar. Por ejemplo, dos copas de cristal pueden romperse en caso de colisión una contra el otra. Una cizalla en un motor está diseñada para la fractura con cierta magnitud de choque.

- Un objeto dúctil se puede doblar por una conmoción (deformar). Por ejemplo, una jarra de cobre se puede curvar cuando cae en el suelo.

-

- Algunos objetos no se dañan por un único choque, pero si se produce fatiga en el material con numerosas repeticiones de choques de bajo nivel.
-
- Un efecto de choque puede resultar sólo daños menores, que pueden no ser críticos para su uso. Sin embargo, daños menores acumulados de varios efectos de choques, eventualmente resultarán en que el objeto sea inutilizable.
-
- Un choque puede no producir daño aparente de inmediato, pero podría reducir la vida útil del producto: la fiabilidad se reduce.
-
- Algunos materiales como los explosivos se pueden detonar con mecánicas de choque o impacto.

Referencias:

Harris, CM, y Peirsol, AG "Shock and Vibration Handbook", 2001, McGraw Hill, ISBN 0-07-137081-1

Problemas

1.- Un automóvil de 1500 kg. De masa choca contra un muro, como se ve en la figura 9.6a. La velocidad inicial Vi = - 15 m/s. La velocidad final VF = - 15m/s. Si el choque dura 0,15 s. Encuentre el impulso debido a este y la fuerza promedio ejercida sobre el automóvil.

Momento inicial
Pi = m Vi
Pi = 1500 * (- 15)
Pi = - 22500 kg. m/s

Momento final
Pf = m Vf
Pf = 1500 * (-2,6)
Pf = 3900 kg. m/s

Por lo tanto el impulse es:
I = ΔP = Pf - Pi

I = 3900 – (- 22500)
I = 3900 + 22500
I = 26400 Ns

La fuerza promedio ejercida sobre el automóvil es:

$$Fprom = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{26400\ Ns}{0.15\ s} = 17600\ N$$

1.2Momento lineal

Teoría

La cantidad de movimiento, momento lineal, ímpetu o momentum es una magnitud física fundamental de tipo vectorial que describe el movimiento de un cuerpo. Fue el propio Newton quien introdujo el concepto de momento lineal (aunque él lo llamaba cantidad de movimiento) que combina las magnitudes características de una partícula material en movimiento: su masa (toda partícula material tiene masa) y su velocidad (magnitud que caracteriza el movimiento).

Un cuerpo puede tener una gran cantidad de movimiento (momento lineal) si tiene una masa muy grande o si se mueve a gran velocidad.

Matemáticamente, el momento lineal se define como:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Donde:

m= masa en kg

$\vec{v}$= velocidad en m/s

Por lo que el momento lineal es una magnitud vectorial (kg m/s). Su dirección y sentido coinciden con los del vector velocidad.

Referencias:

Tipler, Paul (1998). Physics for Scientists and Engineers: Vol. 1: Mechanics, Oscillations and Waves, Thermodynamics (4th ed.). W. H. Freeman. ISBN 1-57259-492-6

Problema

1.- Una persona de 64 kg camina por el parque con una velocidad de 2 m/s. ¿Cuál es la cantidad de movimiento de dicha persona?

Aplicamos la fórmula y reemplazamos los valores:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\vec{p} = 64kg \cdot \frac{2m}{s} = 128kg\ m/s$$

1.3 Impulso y movimiento

Teoría

El impulso es una magnitud vectorial, denotada usualmente como I, definida como la variación en el momento lineal que experimenta un objeto físico en un sistema cerrado.

Todos hemos visto como acelera un auto de Fórmula 1. Si mantiene esa acción (fuerza) durante más tiempo, adquiere mayor velocidad y puede ubicarse primero en la carrera.

Con esto nos damos cuenta de que el efecto que produce una fuerza que actúa sobre un cuerpo depende del tiempo que está actuando. Para medir este efecto se define la magnitud impulso mecánico.

El impulso mecánico (I) se define como el producto de la fuerza (F) por el intervalo de tiempo (Δt) durante el que ésta actúa, se define matemáticamente como:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Donde:

$\vec{F}$ = Vector fuerza en Newtons

Δt= La variación en el tiempo en segundos.

En forma descriptiva, diremos que el impulso es una magnitud vectorial que tiene la dirección y el sentido de la fuerza que lo produce. Su unidad en el Sistema Internacional (S.I.) es el Ns (newton por segundo).

Si queremos comunicar un gran impulso a un cuerpo debemos aplicar una fuerza muy grande durante el mayor tiempo posible.

Las fuerzas aplicadas pueden variar con el tiempo; por eso se habla de fuerza media de impacto cuando golpeamos una pelota con una raqueta o con un palo de golf.

Referencias:

Richard Feynman (1974). Feynman lectures on Physics Volume 1 (en inglés). Addison Wesley Longman. ISBN 0-201-02115-3.

Problema

1.- Un palo de golf impacta en una bola con una fuerza media de 2.000 N. Si el tiempo de contacto entre el palo y la bola es de 0,001 s, ¿cuál es el impulso que comunica a la bola?

Aplicando la fórmula:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

$$\vec{I} = 2000\, N \cdot\ .001\, s = 2Ns$$

1.4 Conservación del momento

Teoría

El principio de conservación del momento lineal establece que si la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo o sistema es nula, su momento lineal permanece constante en el tiempo.

Matemáticamente:

$$\sum \quad \vec{F} = 0 \leftrightarrow \vec{p} = constante$$

Para ilustrar el concepto, pensemos en una mesa de billar, donde puede haber varias bolas moviéndose a la vez (las bolas representan partículas).

Entonces, llamaremos momento lineal de un sistema de varias partículas (varias bolas de billar, según nuestro ejemplo) a la suma de los momentos lineales de todas ellas.

Debemos notar que, como el momento lineal es un vector, cuando sumamos varios momentos tenemos que hacerlo como vectores, no como simples números.

Cuando algunas de las bolas chocan, sus momentos individuales se alteran: algunas se frenarán, otras se acelerarán...

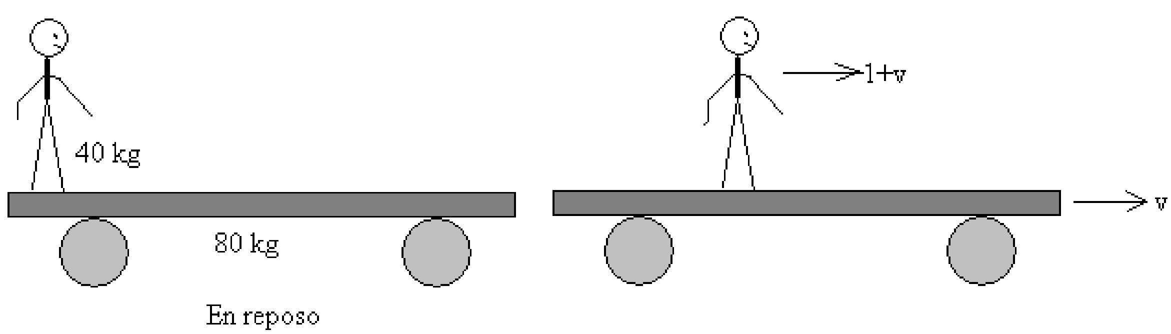
Cuando un sistema de partículas no recibe impulso del exterior, su momento lineal total es constante.

Referencias:

Richard Feynman (1974). Feynman lectures on Physics Volume 1 (en inglés). Addison Wesley Longman. ISBN 0-201-02115-3

Problema

1.- Desde el extremo de una plataforma móvil de 80 kg, inicialmente en reposo, un niño de 40 kg corre hacia el otro extremo a una velocidad constante de 1 m/s (respecto de la plataforma). Determinar la velocidad de la plataforma y el sentido de su movimiento. ¿Qué principio físico aplicas?



Sistema aislado

$F_{ext} = 0$ $\quad F_{ext} = dP \; dt \quad P = cte$

Principio de conservación del momento lineal. El momento lineal inicial es cero, (el niño está en reposo sobre la plataforma).

El niño empieza a correr con velocidad de 1 m/s respecto a la plataforma, es decir, con velocidad (1+v) respecto de Tierra, siendo v la velocidad de la plataforma.

$0=40(1+v)+80\cdot v$

$v=-1/3$ m/s

El niño se mueve hacia la derecha y la plataforma se mueve hacia la izquierda.

CAPITULO 6

Más aplicaciones de las leyes de Newton

Fuerza de fricción cinética.

La fricción entre superficies en movimiento relativo se llama fricción en deslizamiento o fricción cinética. De acuerdo a esta ley, la magnitud de la fuerza de fricción cinética puede escribirse

$$f_k = \mu_k N$$

Donde μ_k es el **coeficiente de fricción cinética,** una característica constante del material de que se trata. La tabla 1 es una lista de coeficientes de fricción para varios materiales comunes.

Observe que la ecuación $f_k = \mu_k N$ dice que las magnitudes de la fuerza de fricción y de la fuerza normal son proporcionales. Las direcciones de estas fuerzas son, sin embargo, bastante diferentes: la fuerza normal $\boldsymbol{N}$ es perpendicular a la superficie de contacto, mientras que la fuerza de fricción $\boldsymbol{f_k}$, es paralela a esta superficie, en un sentido opuesto al del movimiento.

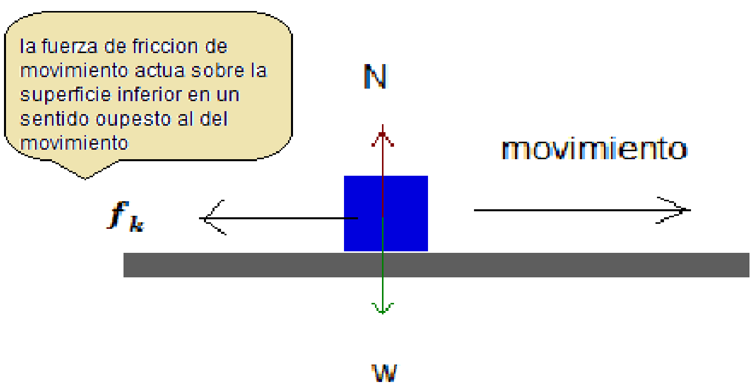


Figura 1. Fuerza sobre un bloque que se desliza sobre una placa

Fuerza de fricción estática

La fricción entre superficies en reposo se llama fricción estática. La magnitud de la fuerza de fricción estática, es decir, la magnitud que alcanza esta fuerza cuando el empuje lateral está a punto de iniciar el movimiento, puede describirse por una ley empírica bastante similar a la ley para la fuerza de fricción cinética.

La magnitud de la máxima fuerza de fricción estática entre superficies secas sin lubricación en reposo con respecto a una de otra es

proporcional a la magnitud de la fuerza normal e independiente al área de contacto.

Matemáticamente,

$$f_{s.max} = \mu_s N$$

Aquí μ_s es una constante de proporcionalidad que se llama coeficiente de fricción estática y que depende del material. La dirección de la fuerza de dirección estática es paralela a la superficie, de modo que se opone al empuje lateral total que trata de mover al cuerpo (como la fuerza F en la figura 2).

La fuerza en la ecuación $f_{s.max} = \mu_s N$ se etiqueta con el subíndice ''máx'' porque representa la mayor fuerza de fricción que pueden soportar las superficies sin comenzar a deslizarse; en otras palabras $f_{s.max}$ es la fuerza en el punto de ruptura, cuando el empuje lateral esta exactamente a punto de iniciar el movimiento.

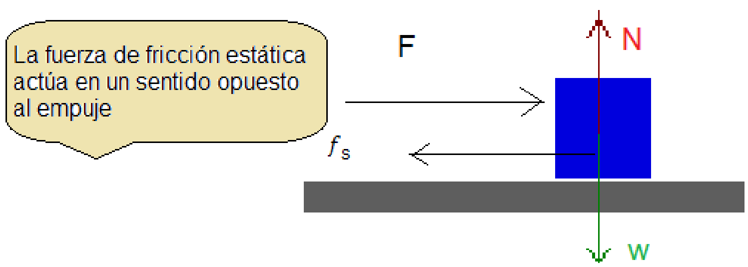


Figura 2. Fuerzas sobre un bloque de acero en reposo sobre una placa de acero la fuerza de fricción f_s tiene la misma magnitud que la fuerza $\boldsymbol{F}$.

Tabla 1. Coeficientes de fricción cinética y estática.

Superficies en contacto	Coeficiente estático	Coeficiente cinético
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Caucho sobre concreto	1.0	0.8
Madera sobre madera	0.25-0.5	0.2
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.4
Madera sobre nieve húmeda	0.14	0.1
Madera sobre nieve seca	—	0.04
Metal sobre metal (lubricado)	0.15	0.06
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Teflón sobre teflón	0.04	0.04

FUERZA DE RESTAURACION DE UN RESORTE (LEY DE HOOKE).

Se dice que un cuerpo es elástico si sufre una deformación cuando se le sujeta una fuerza de tensión o de compresión y si regresa a su forma original cuando deja de aplicarse la fuerza.

La magnitud de la fuerza de restauración es directamente proporcional a la deformación.

Esta ley, como la ley de fricción, no es una ley general de la física; la fuerza de restauración exacta producida por la deformación de un cuerpo elástico depende de manera complicada de la forma del cuerpo y de las propiedades detalladas del material del cuerpo. La ley de Hooke es solo una descripción aproximada de la fuera de restauración. Sin embargo, a menudo es una aproximación bastante buena, siempre y cuando la fuerza de restauración y la deformación sean pequeñas.

La ley de Hooke dice entonces que la fuerza de restauración se opone y es directamente proporcional al desplazamiento x:

$$F = -kx$$

La constante de proporcionalidad k es la constante de resorte; es un número positivo característico del resorte. La constante de resorte es una medida de rigidez del resorte: uno rígido tiene un alto valor k uno suave tiene un valor bajo de k. Las unidades de la constante de resorte son Newtons por metro (N/m). El signo negativo en la ecuación $F = -kx$, indica que la fuerza de restauración se opone a la deformación.

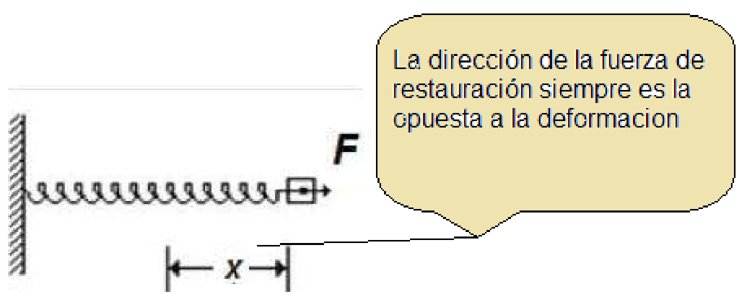


Figura 1. La dirección es hacia la posición relajada; x se mide desde la posición relaja.

6.1 Movimiento de rotación y traslación

La rotación es aquel movimiento de cambio de orientación de un cuerpo extenso de forma que, dado un punto cualquiera del mismo, este permanece a una distancia constante de un punto fijo. En un espacio tridimensional, para un movimiento de rotación dado, existe una línea de puntos fijos denominada eje de rotación.

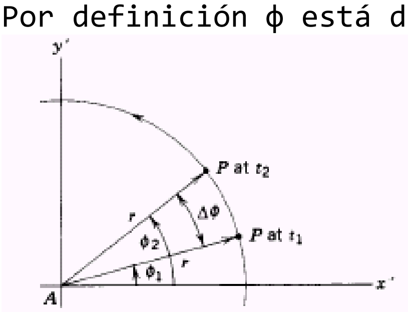
La traslación es aquel movimiento en el que las posiciones de todas las partículas del cuerpo se desplazan una misma cantidad.

Tabla 1: Rotación y traslación

Movimiento de traslación (dirección fija) con a constante	**Movimiento de rotación (eje fijo) con α constante**
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\phi - \phi_0)$
$x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2}t$	$\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2}t$
$x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$	$\phi = \phi_0 + \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

6. 2 Variables rotacionales

El ángulo ϕ es la posición angular de la línea de referencia AP, y normalmente se mide en radianes. Convencionalmente se adopta como sentido positivo de rotación el contrario a las agujas del reloj.
Por definición ϕ está dado en radianes por la relación: ϕ=s/r



Siendo *s* la longitud del arco.

Se define la velocidad angular media como:

$$\omega_{media} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

La velocidad angular (v) se define como $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$

Similarmente, e define la aceleración angular media como: $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

Para un cuerpo rígido tanto ω como α son únicos (valen lo mismo para cada punto).

A continuación se muestra una tabla que compara las ecuaciones referidas al movimiento lineal y angular:

Tabla 2: Movimiento lineal y rotacional

Movimiento lineal		**Movimiento rotacional**	
Desplazamiento	x	Desplazamiento angular	⍰
Velocidad	$v = \frac{dx}{dt}$	Velocidad angular	$\omega = \frac{d\phi}{dt}$
Aceleración	$a = \frac{dv}{dt}$	Aceleración angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Masa (inercia de traslación)	m	Momento de inercia (inercia de rotación)	I
Fuerza	$F = m.a$	Torque	⍰ = I⍰
Trabajo	$W = \int F dx$	Trabajo	$W = \int \tau d\phi$
Energía cinética	$K = \frac{1}{2} m v^2$	Energía cinética rotacional	$K_{ROT} = \frac{1}{2} I \omega^2$
Potencia	$P = Fv$	Potencia	$P =$⍰⍰
Cantidad de movimiento	$p = mv$	Momento angular	$L = I$⍰

6.3 Rotación con aceleración angular constante

En el caso de un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, el movimiento acelerado más simple es el movimiento bajo aceleración angular constante.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Longrightarrow d\omega = \alpha\, dt$$

Además $\omega = \omega_i$ en el instante $t_i = 0$

Tomando esto en cuenta, las expresiones cinemáticas para el movimiento de rotación bajo aceleración angular constante tienen la misma forma matemática que las del movimiento de traslación constante:

$x \rightarrow \theta$; $v \rightarrow \omega$; $a \rightarrow \alpha$

Esto puede ser apreciado en las tablas 1 y 2 de este documento.

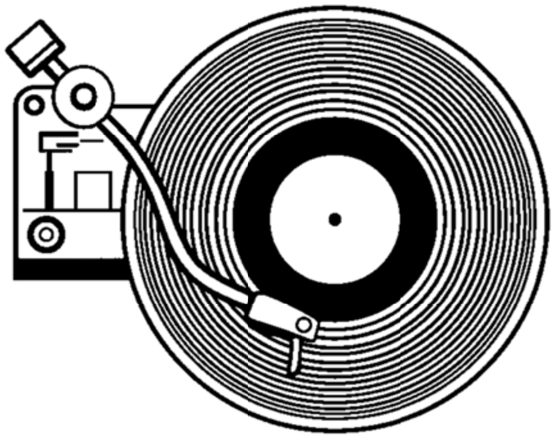


Figura 1: Tocadiscos

Ejemplo:

La tornamesa de un tocadiscos gira inicialmente a razón de 33 rev/min y tarda 2 seg en detenerse. ¿Cuál es la aceleración angular de la tornamesa, suponiendo que la aceleración es uniforme?

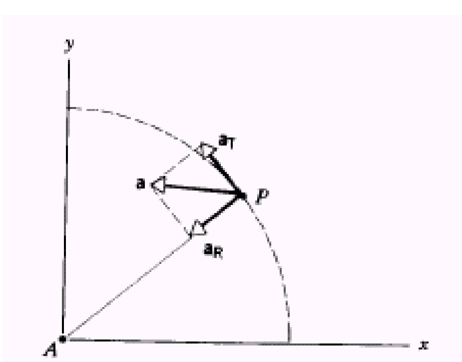
$$w_0 = 33\frac{rev}{min} * \frac{2\pi\, rad}{1\, rev} * \frac{1\, min}{60\, seg} = \frac{30 * 2 * \pi\, rad}{60\, seg} = 3{,}455\ \frac{rad}{seg}$$

Pero $W_f = 0$ a los 2 segundos, cuando el tocadisco se detiene

$$w_0 = -\alpha * t$$

$$\alpha = \frac{-w_0}{t} = \frac{-3{,}455\ \frac{rad}{seg}}{20\, seg} = -0{,}172\frac{rad}{seg^2}$$

El signo negativo indica que la velocidad (ω) está disminuyendo.



6.4 Relación entre las características cinemáticas lineales y angulares de una partícula en el movimiento circular.

$$s = \phi\, r$$

Diferenciando respecto al tiempo: $\frac{ds}{dt} = \frac{d\phi}{dt}$

Lo cual es lo mismo que: $v = \omega\, r$

La aceleración tangencial es: $a_r = \alpha\, r$

La aceleración radial (centrípeta) es: $a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2\, r$

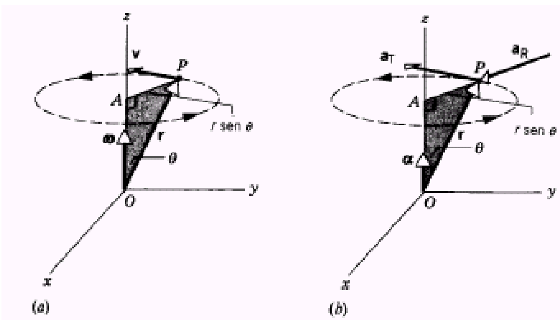


Figura 11 (*a*) Una partícula en *P*, en el cuerpo rígido en rotación de la Fig. 3 está ubicada en **r** con respecto al origen *O*. La partícula tiene una velocidad angular ω (dirigida a lo largo del eje *z*) y una velocidad tangencial **v**. (*b*) La partícula situada en *P* tiene una aceleración angular α a lo largo del eje *z*. La partícula tiene también una aceleración tangencial $\mathbf{a}_T$ y una aceleración radial $\mathbf{a}_R$.

Para la rotación de n cuerpo rígido con respecto a un eje fijo, se cumplen las siguientes relaciones entre las variables lineales y angulares en forma vectorial:

$$v = \omega\ \times r$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \times r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt}$$

$$a = \alpha \times\ r +\ \omega\ \times v$$

$$a =\ a_T +\ a_R =\ \alpha\ \times r +\ \omega \times v$$

$$a_T = \alpha \times R$$

$$a_R = \omega\ \times v$$

Consideremos el movimiento de una partícula en el plano XY, girando alrededor del eje Z en una trayectoria circular de radio r, como se indica en la Figura 1. Para indicar la posición en el tiempo t se requiere conocer sólo a la posición angular q (t) (medida en radianes en el SI). Si el movimiento alrededor del eje Z es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, el desplazamiento angular en un intervalo de tiempo, corresponde al cambio en la posición angular:

$$\Delta\theta = \theta\,(t - \Delta t) - \theta(t)$$

Esta expresión es similar a la del desplazamiento a lo largo de una línea recta, sin embargo se debe tener cierto cuidado con la determinación de las posiciones angulares para evitar algunas confusiones. Por ejemplo, si la partícula gira una vuelta, la posición final es igual a la inicial, pero la posición angular resulta ser igual a la posición angular inicial más el ángulo correspondiente a una vuelta (2π rad en el SI); de tal manera que el desplazamiento angular va relacionado con el número de vueltas.

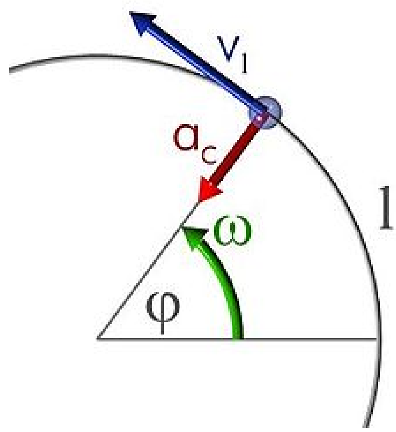


Figura 2. Movimiento en una trayectoria circular

De manera análoga a la velocidad en el movimiento a lo largo de una línea recta, definimos a la velocidad angular w para el movimiento de rotación como el desplazamiento angular por unidad de tiempo:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Las unidades en el SI para la velocidad angular son de radianes por segundo (rad/s).

Por otra parte, la aceleración angular a se define como el cambio en la velocidad angular por unidad de tiempo:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

El desplazamiento, la velocidad, y la aceleración lineal, eran cantidades vectoriales. Dado que hasta el momento hemos considerado que la rotación se producía alrededor de un eje fijo, por lo cual hemos podido considerar a θ, ω y α como escalares.

Se puede demostrar que los desplazamientos angulares finitos no son vectores pues no cumplen la conmutividad de la suma $(\theta_1 + \theta_2) \neq (\theta_2 + \theta_1)$.

Por otra parte, si los desplazamientos angulares se hacen muy pequeños, comienza a cumplirse la ley de conmutabilidad de la suma, por lo tanto los desplazamientos angulares infinitesimales son vectores.

De lo anterior podemos deducir que si la velocidad angular instantánea es un cociente entre un vector y un escalar, entonces dicha magnitud es un vector. Aplicando la regla de la mano derecha, podemos obtener el sentido de ω

Las partículas de un sólido rígido en rotación alrededor de un eje fijo describen circunferencias centradas en el eje de rotación con una velocidad que es proporcional al radio de la circunferencia que describen $v_i = \omega \cdot r_i$

6.5 La torca

Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo rígido anclado alrededor de un eje, el objeto tiende a rotar alrededor de dicho eje. La tendencia de una fuerza a rotar un cuerpo alrededor de un eje se mide por una cantidad vectorial llamada torca (τ).

Se define τ como:

$$\tau = rFsen\phi = Fd$$

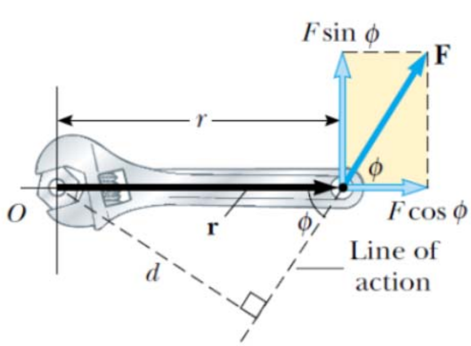


Figura 3: Definición 1 de Torca

Donde ***r*** es la magnitud del radio vector ***r*** que corresponde a la posición del punto de aplicación de la fuerza de magnitud F, mientras que ***d*** es la distancia perpendicular del pivote a la línea de acción de la fuerza. De la definición de torca, vemos que la tendencia rotacional de una fuerza se incrementa conforme F y d lo hacen. Por ello es mejor aplicar la fuerza lo más alejado del eje de rotación.

Es importante recalcar que la torca puede tener signo positivo o negativo. La torca será positiva si esta tiende a rotar el objeto en dirección contraria a las manecillas del reloj; será negativa si tiende a rotar en dirección de las manecillas del reloj.

Como se ha mencionado anteriormente, la torca es una cantidad que puede expresarse como un producto vectorial; para visualizar lo anterior podemos considerar l esquema de la figura 3.

La fuerza F aplicada en el punto P tiende a hacer girar la rueda en dirección contrarreloj. Ejerciendo una torca que se puede describir de la siguiente manera:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

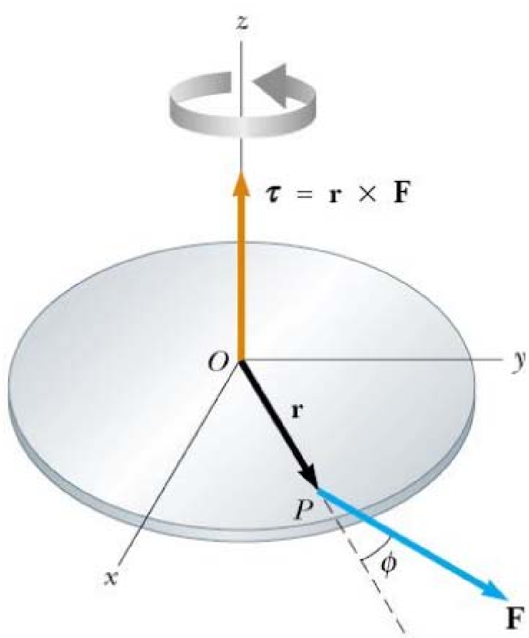


Figura 4: Definición 2 de Torca

FUERZA DEBIDA A LA RESISTENCIA DEL AIRE

A rapidez alta v, donde C es una constante aerodinámica adimensional, **ρ** es la densidad del aire y A es el área de la selección transversal.

$$f_{aire} = \frac{1}{2} C\rho A v^2$$

FUERZA NECESARIA PARA EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

Las leyes de Newton también son válidas para movimiento alrededor de trayectorias curvas.

Si el movimiento ocurre con rapidez v a lo largo de un circulo de radio r, la ecuación

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Dice que la magnitud de la aceleración centrípeta es

$$a = \frac{v^2}{r}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, esta aceleración debe ser causada por una fuerza neta que tenga la misma dirección que la de la aceleración; es decir, *la dirección de la fuerza neta debe ser centrípeta, hacia el centro del círculo*. Tal fuerza dirigida hacia el centro se llama fuerza centrípeta.

La magnitud de la fuerza centrípeta que se necesita para mantener un movimiento circular uniforme es:

$$F = ma = \frac{mv^2}{r}$$

La ecuación simplemente dice que la magnitud de fuerza debe producirse de alguna manera, para mantener al cuerpo en movimiento circular.

LAS CUATRO FUERZAS FUNDAMENTALES

FUERZA GRAVITACIONAL

Es una atracción mutua entre todas las masas. La gravitación es la mas débil de las 4 fuerzas.

FUERZA ELECTROMAGNETICA

Consiste en una atracción o repulsión entre cargas eléctricas. Las fuerzas eléctricas y magnéticas, que alguna vez se consideraban separadas, se agrupan ahora porque están estrechamente relacionadas: la fuerza magnética no es nada mas que una fuerza eléctrica extra que actúa siempre que las cargas están en movimiento. De todas las fuerzas la eléctrica juega un papel más importante en nuestras vidas.

FUERZA FUERTE

Actua principalmente dentro de dos núcleos de los átomos. Juega el papel de un pegamento nuclear que evita que los protones y lo neutrones del núcleo escapen. Esta fuerza nuclear se llama así porque es la más fuerte de las 4 fuerzas, puede ser de atracción o de repulsión.

FUERZA DEBIL

Se manifiesta solo en ciertas reacciones entre partículas elementales. La mayoría de las reacciones causadas por la fuerza débil son de decaimiento radiactivo; comprenden la descomposición espontanea de una partícula en otras varias partículas. Esta fuerza se llama así porque es débil en comparación con la fuerza fuerte y con la fuerza electromagnética.

EJEMPLO 1

Suponga que el coeficiente de fricción cinética del caucho duro de un neumático de automóvil deslizándose sobre pavimento de una calle es $\mu_k = 0.8$ ¿Cuál es la desaceleración de un automóvil sobre una calle plana si el conductor frena repentinamente, de modo que todas las ruedas están trabadas y derrapando? (suponga que el vehículo es modelo económico que no tiene un sistema de frenado anti trabado).

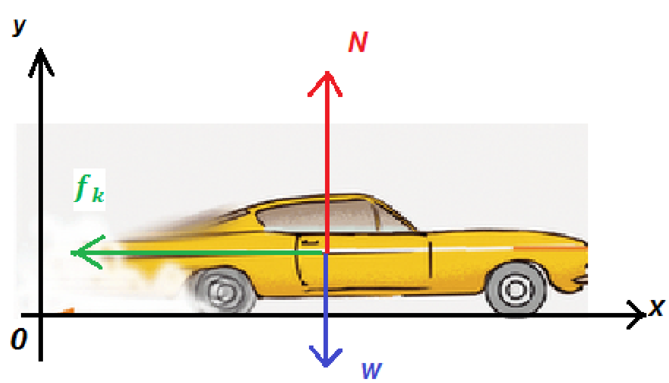


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre para un automóvil que derrapa con las ruedas trabadas.

Solución:

La figura 1 muestra el diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas que se ejercen sobre el automóvil. Estas son el peso $\boldsymbol{w}$, la fuerza normal N que ejerce la calle y la fuerza de fricción f_k. La fuerza normal debe equilibrar el peso, por lo cual la magnitud de la fuerza normal es la misma que la magnitud del peso, o

$$N = \omega = mg$$

De acuerdo con la ecuación $f_k = \mu_k N$, la magnitud de la fuerza de fricción es entonces

$$f_k = \mu_k N = .8 \times mg$$

Como esta fuerza de fricción es la única fuerza horizontal sobre el automóvil, la desaceleración del mismo a lo largo de la calle.

$$a_x = \frac{f_k}{m} = \frac{.8 \times mg}{mg} = -0.8 \times g$$

$$= -.8 \times 9.8\, {}^{m}/_{s^2} = \mathbf{-8\, {}^{m}/_{s^2}}$$

Ejemplo 2

Un barco bota al agua sobre una rampa que forma un ángulo de 5° con la dirección horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el fondo del barco y la rampa es $\mu_k = .08$ ¿cual es la aceleración del barco a lo largo de la rampa? ¿Cuál es la rapidez del barco después de acelerar desde el reposo durante distancia de 120 m hacia debajo de la rampa y hacia el agua?

Solución:

Las fuerzas son el peso w, la fuerza normal que ejerce la rampa N, y la fuerza de fricción f_k. La magnitud del peso es $\omega = mg$.

Como no hay movimiento en la dirección perpendicular a la rampa, se encuentra, como la ecuación $N = mg\cos\theta$, que la fuerza normal es

$$N = mg\cos\theta,$$

Y la magnitud de la fuerza de fricción es

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$$

Con el eje x paralelo a la rampa, la componente x del peso es

$$\omega_x = mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

La componente en x de la fuerza neta es entonces

$$F_x = \omega_x - f_k = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

Por tanto, la aceleración del barco a lo largo de la rampa es

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu_k mg\cos\theta}{m} = (\mathrm{sen}\,\theta - \mu_k\cos\theta)\,g$$

Observe que en esta ecuación la masa se ha cancelado: la aceleración es la misma para un barco grande que para uno pequeño. Con $\theta = 5°$ y

$\mu_k = 0.08$, con la ecuación

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{mg\,\mathrm{sen}\,\theta\ - \mu_k mg\cos\theta}{m} = (\mathrm{sen}\,\theta\ - \mu_k\cos\theta)\,g$$

Se obtiene

$$a_x = (sen\,5° - 0.08\ \times \cos\ 5°) \times 9.81\frac{m}{s^2} = .07\frac{m}{s^2}$$

Por cinemática, se sabe que la velocidad y el desplazamiento cuando hay una aceleración constante desde el reposo ($v_{0x} = 0$) seran

$$v_x = \ a_x t$$

$$x - x_0 = \ \frac{1}{2}a_x t^2$$

Puede despejarse el tiempo t en la segunda ecuación:

$$t = \sqrt{\frac{2(x - x_0)}{a_x}}$$

Y sustituimos en la primera

$$v_x = a_x \times \sqrt{\frac{2(x - x_0)}{a_x}} = \sqrt{2(x - x_0)a_x}$$

$$\sqrt{2 \times 120\,m \times .07\frac{m}{s^2}} = \mathbf{4}\ \boldsymbol{\frac{m}{s}}$$

Esta es la rapidez del barco en el agua.

EJEMPLO 3

Un hombre empuja un pesado cajón sobre un piso. Lo hace hacia abajo y hacia adelante, de modo que su empuje forma un ángulo de 30° con la horizontal. La masa del cajón es de 60 kg y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.50$ ¿Qué fuerza debe ejercer el hombre para mantener el cajón moviéndose a velocidad uniforme?

Solución:

La figura 1b es un diagrama de cuerpo libre para el cajón. Las fuerzas sobre el cajón son el empuje P del hombre, el peso w, la fuerza normal N y la fuerza de fricción f_k. Observe que como el hombre empuja el cajón hacia abajo contra el piso, la magnitud de la fuerza normal no es igual a mg. Tendrá que tratarse la magnitud de la fuerza como normal como incógnita. Tomando el eje x horizontal y el eje y vertical, se observa, que las componentes x y y de las fuerzas son

$$P_x = P\cos 30° \qquad\qquad P_y = \ -P\ sen\ 30°$$

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = -mg$$

$$N_x = 0 \qquad N_y = N$$

$$f_{k,x} = -\mu_k N \qquad f_{k,y} = 0$$

Como la aceleración es cero tanto en la dirección x como en la dirección y, y la fuerza neta en cada una de estas direcciones debe ser cero:

$$P\cos 30° + 0 + 0 - \mu_k N = 0$$

$$-P\,sen\,30° - mg + N + 0 = 0$$

Hay dos ecuaciones para las dos incógnitas P y N. multiplicando la segunda ecuación por μ_k y luego sumando la ecuación resultante a la primera, puede eliminarse N y encontrar una ecuación para P:

$$P\cos 30° - \mu_k sen\,30° - \mu_k mg = 0$$

Despejando P se encuentra

$$P = \frac{\mu_k mg}{\cos 30° - \mu_k sen\,30°} = \frac{.50 \times 60\,kg \times 9.81\,{}^{m}/_{s^2}}{\cos 30° - .50 \times sen\,30°}$$

$$= \mathbf{4.8 \times 10^2 N}$$

EJEMPLO 4

El coeficiente de fricción estática del caucho de un neumático de un automóvil sobre una superficie de calle es μ_s=.90. ¿Cuál es la pendiente mas empinada de una calle en el que un automóvil con tales neumáticos (y ruedas trabadas) puede permanecer sin deslizarse?

Solución:

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 1. Se supone que el ángulo esta en su valor máximo, de modo que la fuerza de fricción tiene su valor máximo $f_s = \mu_s N$. Como en el ejemplo 2, $N = mg\cos\theta$ y por tanto $f_{s,max} = \mu_s mg\; mg\cos\theta$. Con este eje x paralelo a la superficie de la calle, se obtiene entonces la componente en x de la fuerza neta es:

$$F_x = \omega_x - f_{s.max} = mg\,sen\,\theta - \mu_s mg\cos\theta$$

Esta componente de la fuerza determina el movimiento a lo largo de la calle. Si el automóvil ha de permanecer estacionario, F_x debe ser cero:

$$0 = mg\,sen\,\theta - \mu_s mg\cos\theta$$

Por tanto, dividiendo entre mg

$$sen\,\theta = \mu_s \cos\theta$$

O, dividiendo esta ecuación entre $\cos\theta$

Con $\mu_s = .90$, se obtiene que $\tan\theta = .90$. Así, la pendiente de la calle es .90 o 9:00. (con una calculador, se encuentra que el arco-tangente de .90 es $\theta = 42°$ para el ángulo de la rampa).

EJEMPLO 5

Un automóvil frena en un camino nivelado. ¿Cuál es la desaceleración máxima que el automóvil puede alcanzar al frenar sin derrapar? Como en el ejemplo anterior suponga que los neumáticos del automóvil tienen coeficiente de fricción de $\mu_s = .90$.

Solución:

Si las ruedas ruedan sin derrapar, su superficie de caucho no se desliza sobre la superficie de la calle; es decir, el punto de contacto entre la rueda rodante y la calle es instantáneamente en reposo sobre la calle (usted puede convencerse fácilmente de esto haciendo rodar cualquier objeto redondo sobre una mes). Como no hay deslizamiento, la fuerza de fricción que importa es la fricción estática. El calor máximo de esta fuerza es

$$f_{s.max} = \mu_s N$$

Aquí, la magnitud de la fuerza normal N es simplemente mg, ya que la fuerza normal debe equilibrar el peso. La desaceleración esta entonces dada por

$$a_x = \frac{f_{s.max}}{m} = \frac{\mu_s mg}{m} = \mu_s g$$

Que da

$$a_x = -.9 \times 9.8\ {}^{m}/_{s^2} = -9\ {}^{m}/_{s^2}$$

EJEMPLO 6

Un fabricante ofrece una constante aerodinámica $C = .30$ para un automóvil con masa de 900 kg y área de sección transversal $A = 28\,m^2$. Si el conductor fuera a bajar con el motor en neutral por una larga colina con una pendiente de $8.0°$, ¿Cuál sería la velocidad terminal? Recuerde por la sección 2.6, que la velocidad terminal es la velocidad final constante de un cuerpo que se mueve bajo la fuerza combinada de la gravedad y la resistencia del aire. Suponga que la resistencia del aire es la única fuente de fricción.

Solución:

Se necesita considerar solamente las componentes de la fuerza paralelas al movimiento

$$\omega_x = mg\ sen\ \theta\ y\ f_{aire,x} = -\frac{1}{2}C\rho A v^2$$

Cuando se alcanza la velocidad terminal (constante), las dos fuerzas se equilibran y la aceleración es cero. Así

$$\frac{1}{2}C\rho A v^2 = mg\ sen\ \theta$$

Despejando la velocidad, se encuentra

$$v = \sqrt{\frac{2mg\ sen\ \theta}{C\rho A}}$$

Insertando los valores dados en el problema más la densidad del aire $\rho = 1.3\ kg/m^3$, se tiene

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 900\ kg \times 9.8\frac{m}{s^2} \times sen\ 8.0°,}{.30\ \times 1.3\frac{kg}{m^3} \times 2.8m^2}}$$

$$= 47\frac{m}{s}$$

Esto es lo mismo que

$$\boldsymbol{v = 47\frac{m}{s} \times \frac{1\ km}{1000\ m} \times \frac{3\ 600\ s}{1\ h} = 170\ km/h}$$

EJEMPLO 7

Las especificaciones del fabricante con respecto al resorte helicoidal para la suspensión delantera de un automóvil deportivo Triumph estipulan un resorte con longitud en relajación de .316 m y una longitud de .205 m cuando está sometido a una carga 399 kg ¿Cuál es la constante del resorte?

Solución:

El peso de 399 kg es $\omega = mg = 399kg\ \times 9.81\frac{m}{s^2} = 3.91 \times 10^3\,N$. La magnitud de la fuerza de restauración que equilibrara para este peso debe ser entonces de $3.91 \times 10^3\,N$. Para las longitudes proporcionadas en relajación y en comprensión, el cambio correspondiente de longirud es $x = .205\ m - .316\ m = -.111\ m$. Por tanto, se obtiene:

$$k = -\frac{F}{x} = 3.91 \times \frac{10^3\ N}{-.111\ m} = 3.35 \times 10^4\ N/m$$

EJEMPLO 8

Un vagón teleférico con masa de 1 200 kg esta estacionado en una pendiente de 20°, comprimiendo un resorte de retención gigantesco a una longitud de .75 m. si la constante de resorte es de $2.0 \times 10^4 \, N/m$ ¿Cuál es la longitud del resorte cuando esta relajado? Desprecie la fricción.

Solución:

Un diagrama de cuerpo libre para el vagón del teleférico se muestra en la figura, con el eje x paralelo a la rampa. La fuerza del resorte $F? - kx$ equilibra la componente del peso del vagón paralelo a la pendiente $\omega_x = mg \, sen \, \theta$. para el vagón estacionario, la componente x de la fuerza neta debe ser cero:

$$0 = mg \, sen \, \theta - kx$$

Esto implica la longitud se ha comprimido en

$$x = \frac{mg \, sen \, \theta}{k} = \frac{1\,200 \, kg \times 9.81 \, {}^{m}/_{s^2} \times sen \, 20°}{2.0 \times 10^4 \, N/m}$$

$$0.20 \, m$$

Asi la longitud relaja del resorte es de .75 m + .20 m = **.95 m**

EJEMPLO 9

En el lanzamiento de martillo, un atleta lanza un martillo que consiste que una bola pesada de metal atada a una manija por un cable de acero. Inmediatamente antes de lanzar el martillo, el atleta lo hace girar en círculos varias veces. La masa de la bola es de 7.3 kg y la distancia del martillo al centro de su movimiento circular es de 1.9 m (incluida alguna longitud del brazo del atleta). La rapidez del martillo es de 27 m/s. ¿Cuál es la fuerza ejercida del atleta con sus brazos para mantener el martillo moviéndose en circulo?

Solución:

La magnitud de la fuerza debe ser

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} = \frac{7.3 \, kg \times (27 \frac{m}{s})^2}{1.9 \, m} = 2.8 \times 10^3 \, N$$

¡Esta es una fuerza bastante grande! El lanzamiento de martillo exige una gran fuerza física y sus ejecutantes deben ser de complexión robusta.

EJEMPLO 10

¿Cuál es la rapidez máxima con la que un automóvil puede dar vuelta en una curva de 100 m de radio sin derrapar lateralmente? Suponga que el camino es plano y que el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la superficie del camino es $\mu_s = .80$.

Solución:

Las fuerzas sobre al automóvil son el peso w, la fuerza normal N y la fuerza de fricción f_s. El peso equilibra la fuerza normal; es decir, $N = mg$. La fuerza horizontal de fricción debe dar una fuerza centrípeta; por tanto, la magnitud de la fuerza de fricción debe ser:

$$f_s = ma = \frac{mv^2}{r}$$

La fricción es estática porque, por suposición, no hay deslizamiento lateral. A la velocidad máxima posible, la fuerza de fricción tiene su valor máximo $f_s = f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s mg$ y consecuentemente

$$\mu_s mg = \frac{mv^2}{r}$$

Pueden cancelarse las masas de ambos miembros de ecuación y luego multiplicarse ambos miembros por r. extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros obtenemos entonces:

$$v = \sqrt{\mu_s gr}$$

$$= \sqrt{.80 \times 9.81\frac{m}{s^2} \times 100m} = 28\frac{m}{s}$$

Esto es alrededor de 100 km/h.

EJEMPLO 11

En una autopista en Texas, una curva de 500 m de radio tiene un peralte en ángulo de 22°. Si el conductor de un auto de carreras no desea depender de la fricción lateral, ¿a que velocidad debe tomar la curva?

Solución:

La fricción lateral se supone ausente y por tanto la fuerza normal N y el peso w son la únicas fuerza que actúan en el auto de carreras, perpendiculares a su movimiento. La resultante de estas fuerzas debe jugar un papel de la fuerza centrípeta. Por tanto, la resultante debe ser horizontal.

$$\omega \tan\theta = ma = \frac{mv^2}{r}$$

o

$$mg\tan\theta = \frac{mv^2}{r}$$

Que produce

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

$$= \sqrt{500\,m \times 9.81\,{}^{m}/_{s^2} \times \tan 22°} = 45\,m/s$$

Esto es 160 km/h. si el auto va mas rápido, tendera a derrapar hacia arriba del peralte; si va mas lento tendera a deslizarse hacia abajo del peralte, a meno que la fricción lo mantenga en su sitio.

EJEMPLO 12

Una aviadora en un avión jet rápido hace el giro rizo. El radio del rizo es de 400 m y el avión tiene una rapidez de 150 m/s cuando pasa por la parte inferior del rizo ¿Cuál es el peso aparente que siente la aviadora? En otras palabras, ¿Cuál es la fuerza con la que empuja contra su asiento? Exprese la respuesta como múltiplo del peso normal de la aviadora.

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre ella son el peso (verdadero) w y la fuerza normal N que ejerce el asiento. La fuerza neta vertical hacia arriba es $N - mg$ y esta debe producir aceleración centrípeta.

$$N - mg = ma = \frac{mv^2}{r}$$

Observe que aquí se usa una fórmula similar $\frac{v^2}{r}$ para la aceleración centrípeta, aunque la rapidez no sea constante (la rapidez del avión aumenta algo cuando baja por el rizo y disminuye cuando sube por el). Tal cambio de rapidez a lo largo del rizo implica que puede haber una aceleración extra a lo largo del rizo; pero esta no afecta a la aceleración centrípeta: las dos aceleraciones están en ángulo recto y son independientes. Para los fines de este problema, no se necesita prestar ninguna atención a la aceleración tangencial extra a lo largo del rizo en cualquier punto.

Despejando N de la ecuación se obtiene:

$$N = mg + \frac{mv^2}{r} = mg(1 + \frac{v^2}{gr})$$

Con $v = 150\frac{m}{s}\,y\;r = 400\,m, se\ encuentra\ entonces$

$$N = mg(1 + \frac{(150\, m/s)^2}{9.81\frac{m}{s^2} \times 400m} = mg\ \times 6.7$$

Está es la fuerza con la que el asiento presiona contra la aviadora y es, por tanto, el peso aparente que ella siente. Este peso es igual al peso verdadero multiplicado por un factor 6.7. en estas circunstancias, la aviadora diría que esta ejecutando 6.7g, porque siente como si la gravedad hubiera aumentado por un factor 6.7.

Comentario:

Este ejemplo demuestra que la aceleración centrípeta puede generar un aumento de peso; aparente en el marco de referencia de un cuerpo en movimiento circular puede ser mucho mayor que su peso normal.

CAPITULO 7

TRABAJO Y ENERGÍA

TRABAJO

$$W = F_x \Delta x$$

La definición de trabajo rigurosa de trabajo es congruente con la notación intuitiva que se tiene de lo que constituye el trabajo. Por ejemplo, la partícula puede ser un automóvil que se le apago el motor y que usted está empujando por un camino.

Entonces el trabajo que usted realiza es proporcional a la magnitud de la fuerza que tiene que ejercer y también es proporcional a la distancia a la que se mueve el automóvil

Considere una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva arbitraria y suponga que la fuerza que actúa sobre la partícula es constante (se consideraran fuerzas que no son constantes en la siguiente sección). La fuerza puede entonces representarse por un vector $\boldsymbol{F}$ que es constante en magnitud y dirección. El trabajo realizado por esta fuerza constante durante un desplazamiento (vectorial) s se define como

$$W = F_s\ \cos\theta$$

Donde $F\, es\, la\, magnitud\, de\, la\, fuerza, s$ es la longitud del desplazamiento y θ es el ángulo entre la dirección de la fuerza y la dirección de la fuerza y la dirección del desplazamiento. Tanto F como s son positivas; el signo correcto para el trabajo lo indica el factor $\cos\theta$.

El trabajo realizado por la fuerza F es positivo si el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es menor que 90°, y es negativo si este ángulo es mayo de 90°.

Para los vectores arbitrarios $\boldsymbol{A}\, y\, \boldsymbol{B}$, el producto de sus magnitudes y el coseno del ángulo que forman se **llama producto punto** (o **producto escalar**) de los vectores. La notación estándar para el producto punto consiste en los dos símbolos e los vectores separados por un punto:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta$$

De acuerdo con esto, la expresión para el trabajo puede escribirse como el producto punto del vector de fuerza $\boldsymbol{F}$ y el vector desplazamiento $\boldsymbol{s}$:

$$W = F \cdot s$$

En la sección 3.4 se encontró que el producto punto es también igual a la suma de los productos de las componentes correspondientes de los dos vectores.

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$W = F_x \Delta x + F_z \Delta y + F_z \Delta z$$

Observe que, aunque esta ecuación expresa el trabajo como una suma de contribuciones de las componentes x, y y z de la fuerza y el desplazamiento, el trabajo no tiene componentes separadas.

TRABAJO PARA UNA FUERZA

La definición de trabajo en la sección precedente suponía que la fuerza es constante. Pero muchas fuerzas no son constantes y se necesita depurar la definición de trabajo de modo que puedan manejarse estas fuerzas.

Tal fuerza variable puede expresarse como función de la posición:

$$F_x = F_x(x)$$

Para evaluar el trabajo realizado por esta fuerza variable sobre el automóvil, o sobre, una partícula, durante un desplazamiento de x=a a x=b, se divide el desplazamiento total en un gran número de pequeños intervalos, cada uno con una longitud Δx. Los principios y los finales de estos intervalos se ubican en $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$, donde la primera ubicación x_0 coincide con a y la ultima ubicación x_n coincide con b. dentro de cada intervalo pequeños, la fuerza puede considerarse como aproximadamente constante $F_x(x_i)$. El trabajo realizado por esta fuerza mientras la partícula se mueve de x_{i-1} a x_i es entonces

$$F_x(x_i)\Delta x$$

Así la definición exacta para trabajo realizado por una fuerza variable es

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_x(x_i)\Delta x$$

Esta función se llama integral de la función $F_x(x)$ entre los limites de a y b. la notación usual para esta integral es

$$W = \int_a^b F_x(x)\ dx$$

Donde el símbolo $\int$ se conoce como signo de la integral y la función $F_x(x)$ se conoce como el integrando. La cantidad es igual al área limitada por la representación curva de $F_x(x)$, el eje x y las líneas verticales $x = a \; y \; x = b.$

Por último, si la fuerza es variable y el movimiento esta en más de una dimensión, el trabajo puede obtenerse al generalizar la ecuación

$$W = \int \boldsymbol{F} \cdot \ ds$$

Para evaluar la ecuación, con frecuencia es mas fácil expresar las integrales como la suma de tres integrales. Por ahora se considera el uso de la ecuación

$$W = \int_a^b F_x(x)\ dx$$

Para determinar el trabajo total realizado por una fuerza variable cuando actúa a lo largo de una distancia en una dimensión.

ENERGIA CINETICA

La energía es trabajo almacenado, o trabajo latente, que puede convertirse en trabajo efectivo bajo condiciones adecuadas. Un cuerpo en movimiento tiene energía de movimiento, o energía cinética.

Puede establecerse una importante identidad entre trabajo realizado por la fuerza y el cambio de velocidad que produce. Si esta línea recta coincide con el eje x, entonces el trabajo realizado por la fuerza neta $F_{neta,x}$ durante un desplazamiento de $x_1 \; a \; x_2$ es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_{neta,x}\ dx$$

En consecuencia el trabajo se convierte en

$$m\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt}\, dx = m\int_{x_1}^{x_2} v\frac{dv}{dt}\, dx = m\int_{v_1}^{v_2} v\; dv = m\frac{1}{2}v^2 \Big|_{v_1}^{v_2}$$

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

De modo que la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ es la cantidad de trabajo almacenado en la partícula, o la energía cinética de la partícula.

La energía cinética se representa con un símbolo K

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Con esta notación expresa el cambio el energía cinética es igual al trabajo neto realizado sobre la partícula, es decir,

$$K_2 - K_1 = W$$

$$\Delta \mathrm{K} = \mathrm{W}$$

Este resultado se llama teorema del trabajo y la energía .

La adquisición de energía cinetica mediante el trabajo y la posterior producción de trabajo por esta energía cinetica se ilustran claramente en la operación de una rueda hidráulica movida por caída de agua.

ENERGIA POTENCIAL GRAVITATORIA

La energía potencial gravitatoria representa la capacidad de la partícula de realizar trabajo en virtud de su altura sobre la superficie de la tierra.

De modo que la cantidad mgy representa la cantidad de trabajo almacenado o latente; es decir representa la energía potencial gravitacional. Se adoptara la nomenclatura U para la energía potencial gravitacional:

$$U = mgy$$

Esta energía potencial es directamente proporcional a la altura y y se ha elegido para que sea cero en $y = 0$.

En términos de la energía potencial gravitatoria, la ecuación para el trabajo realizado por la gravedad se vuelve

$$W = -U_2 + U_1$$

Como $\Delta U = U_2 - U_1$ es el cambio en la energía potencial, la ecuación dice que el trabajo es igual al negativo del cambio potencial

$$W = -\Delta U$$

Si la única fuerza que actúa sobre la partícula es la gravedad, entonces, combinando ecuaciones, puede obtenerse una relación entre la energía potencial y la energía cinética. De acuerdo con la ecuación $K_2 - K_1 = W$, el cambio en energía cinética es igual al trabajo, o $K_{2\_}K_1 = W$; y, de acuerdo con la ecuación $W = -U_2 + U_1$, el negativo del cambio en energía potencial también es igual al trabajo: $W = -U_2 + U_1$

Por tanto el cambio en energía cinética debe ser igual al negativo del cambio de energía potencial:

$$K_2 - K_1 = -U_2 + U_1$$

Esto se reescribe como sigue

$$K_2 + K_1 = K_1 + U_1$$

Esta igualdad indica que la cantidad K+U es una constante del movimiento

$$K + C = constante$$

La suma de las energías potencial y cinética se llama energía mecánica de la partícula, usualmente se le designa el símbolo E:

$$E = K + U = constante$$

Esta es la ley de la conservación de la energía mecánica.

Como la suma de las energías potencial y cinética debe permanecer constante durante el movimiento, el aumento en una debe componerse por una disminución en la otra; esto significa que durante el movimiento, la energía cinética se convierte en potencial y viceversa.

Además de su significado practico en términos de trabajo, la energía mecánica es muy útil en el estudio del movimiento de una partícula.

Esto se muestra explícitamente como la pelota, o cualquier otra partícula que se mueva bajo la influencia de la gravedad, cambia la rapidez por la altura durante el movimiento.

Se consideran las posiciones verticales (y_1 y y_2) y las rapideces (v_1 y v_2) en dos tiempos diferentes, puede igualarse la energía mecánica total en esos dos tiempos:

$$\frac{1}{2}mv\frac{2}{1} + mgy_1 = \frac{1}{2}mv\frac{2}{2} + mgy_2$$

Reordenando se obtiene inmediatamente

$$-g\Delta y = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

EJEMPLO 1

Suponga que usted empuja su automóvil con el motor apagado por una calle recta. Si la fuerza necesaria para vencer la fricción y para mantener a su automóvil moviéndose con una rapidez constante de 500 N ¿Cuánto trabajo debe usted hacer para empujar 30 cm este automóvil?

Solución:

Con $F_x = 500\,N\ y\ \Delta x = 30m$, la ecuación $W = F_x \Delta x$ produce

$$W = F_x \Delta x = 500\,N \times 30\,m = 15\,000\,J$$

EJEMPLO 2

Un carro de montaña rusa de masa m se desliza hacia abajo hasta la parte mas baja de una sección recta de un tramo inclinado, desde una altura h. a) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza normal? Trate el movimiento como movimiento de partícula.

Solución:

a) El carro de montaña rusa baja por toda la longitud de este tramo. Por inspección del triangulo rectángulo lo que forman la rampa y el piso, se observa que el desplazamiento del carro tiene una magnitud

$$s = \frac{h}{sen\phi}$$

$$W = \omega s \cos\theta = mg \times \frac{h}{sen\phi} \times \cos(90° - \phi)$$

Como $\cos(90° - \phi) = sen\,\phi$, el trabajo es

$$\mathrm{W} = mg \times \frac{h}{sen\phi} \times sen\phi = mgh$$

b) El trabajo realizado por la fuerza normal es cero, ya que esta fuerza forma un ángulo de 90° con el desplazamiento.

EJEMPLO 3

Un resorte ejerce una fuerza de restauración $F_x(x) = -kx$ sobre una partícula fija a el. ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte en la partícula cuando se mueve de x=a y x=b?

Solución:

Mediante la ecuación $W = \int_a^b F_x(x)\ dx$, el trabajo es la integral

$$W = \int_a^b F_x(x)\ dx = \int_a^b (-kx)\ dx$$

para evaluar esta integral se cuenta con un resultado de calculo que establece que la integral entre a y b de la función x es la diferencia entre los valores de $\frac{1}{2}x^2$ en x=b y x=a.

$$\int_a^b x\ dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$W = \int_a^b (-kx)\ dx = -k\int_a^b x\ dx = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{b^2} - \boldsymbol{a^2})$$

EJEMPLO 4

Durante un juego de beisbol, el lanzador arroja la pelota con una rapidez de 30m/s. la masa de la pelota es de .15 kg ¿Cuál es la energía cinética de la pelota cuando sale de su mano? ¿Cuánto trabajo hizo su mano sobre la pelota durante el lanzamiento?

Solución:

La rapidez final de la pelota cuando sale de su mano al final del movimiento de lanzamiento es $v_2 = 30\, m/s$. La energía cinética final de la pelota es

$$K_2 = \frac{1}{2}mv\frac{2}{2} = \frac{1}{2} \times .15\ kg \times (30\frac{m}{s})^2 = 68\, J$$

Como la energía cinética inicial al principio del movimiento de lanzamiento es cero $(v_2 = 0)$, el cambio de energía cinética es igual a la energía cinética final y el trabajo es

$$W = K_2 - K_1 = 68\, J - 0 = \mathbf{68}\, \boldsymbol{J}$$

Observe que, para que este cálculo de trabajo, no se necesito conocer los detalles de cómo varia la fuerza durante el movimiento de lanzamiento. Con el teorema del trabajo y la energía se obtiene la respuesta directamente.

EJEMPLO 5

Mientras trata de detener su automóvil en una calle plana, un conductor ebrio pisa el pedal del freno demasiado fuerte y comienza a derrapar. Derrapa 30 m con todas las ruedas trabadas, dejando marcas de derrape en el pavimento, antes de soltar el pedal y dejar que las ruedas vuelvan a rodar. ¿Cuánta energía cinética pierde el automóvil por la fricción durante el derrape? Si usted encuentra marcas de derrape de 30 m sobre el pavimento, ¿Qué puede concluir acerca de la rapidez inicial del automóvil? La masa del automóvil es de 1 100 kg y el coeficiente de fricción deslizante entre las ruedas y la calle es de $\mu_k = .90$.

Solución:

La magnitud de la fuerza de fricción deslizante es $f_k = \mu_k N = \mu_k mg$.

Con el eje x en la dirección del movimiento, la componente x de esta fuerza de fricción es negativa:

$$f_k = \mu_k mg$$

Como la fuerza es constante, el trabajo realizado por esta fuerza es

$$W = F_x \Delta x = \mu_k mg \times \Delta x$$

$$= -.90 \times 1\,100\,kg \times \frac{9.81m}{s^2} \times 30m = -2.9 \times 10^5\,J$$

De acuerdo con el teorema del trabajo y la energía, este trabajo es igual al cambio de energía cinética:

$$\Delta K = W = -2.9 \times 10^5\,J$$

Como la energía cinética del automóvil disminuye en $-2.9 \times 10^5\,J$, su energía cinética inicial debe haber sido de por lo menos $2.9 \times 10^5\,J$. Por tanto, su rapidez inicial debe haber sido por lo menos suficientemente alta para proporcionar esta energía cinética; es decir,

$$\frac{1}{2}mv\,\frac{2}{1} \geq 2.9 \times 10^5\,J$$

Y por tanto

$$v_q \geq \sqrt{\frac{2 \times -2.9 \times 10^5\,J}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times -2.9 \times 10^5\,J}{1\,100\,kg}} = \mathbf{23}\,\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}} = \mathbf{83}\,\frac{\boldsymbol{km}}{\boldsymbol{h}}$$

EJEMPLO 6

¿Cuál es la energía cinética y cual es la energía potencial gravitatoria (relativa al suelo) de un avión jet de 73 000 kg de masa a rapidez de crucero a 240 m/s a una altitud de 9 000 km?

Solución:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 7.3 \times 10^4 kg\ \times (\frac{240m}{s})^2 = 2.1 \times 10^9 J$$

La energía potencial gravitatoria es de

$$U = mgy = 7.3 \times 10^4 kg \ \times 9.81 \frac{m}{s^2} \times 9.0 \times 10^3 m = 6.4 \times 10^9 J$$

EJEMPLO 7

Un carro de la montaña rusa desciende 38 m de un punto mas alto a su punto mas bajo. Suponga que el carro, inicialmente en reposo en el punto mas alto, rueda hacia abajo por esta pista sin fricción. ¿Qué rapidez alcanzara en el punto mas bajo? Trate el movimiento como movimiento de partícula.

Solución:

Las coordenadas de los puntos mas alto y más bajo son $y_1 = 38\,m$ y $y_2 = 0$, respectivamente. De acuerdo con la ecuación, la energía al principio del movimiento para un carro que esta inicialmente en reposo es

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 + m g y_1 = 0 + m g y_1$$

Y la energía al final del movimiento es

$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g y_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + 0$$

La conservación de la energía implica que los miembros derechos de las ecuaciones son iguales

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = m g y_1$$

Despejando v_2, se encuentra

$$v_2 = \sqrt{2 g y_1}$$

Con lo cual se obtiene

$$v_2 = \sqrt{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2} \times 38\,m} = 27 m/s$$

Observe que, de acuerdo con la ecuación $v_2 = \sqrt{2 g y_1}$, la velocidad final es independiente de la masa del carro, ya que como tanto la energía cinética como la energía potencial gravitatoria son proporcionales a la masa, esta se cancela en este cálculo.

CAPITULO 8

CONSERVACIÓN DE LA ENERÍA

ENERGIA POTENCIAL DE UNA FUERZA CONSERVATIVA

Para formular la ley de la conservación de la energía para una partícula que se mueve bajo la influencia de la gravedad, se comenzó con el teorema del trabajo y la energía.

$$K_2 - K_1 = W$$

Luego se expreso se expreso el trabajo W con una diferencia de dos energías potenciales:

$$W = -U_2 + U_1$$

Con esto se obtuvo

$$K_2 - K_1 = -U_2 + U_1$$

De donde se encontró inmediatamente la ley de la conservación para la suma de las energías potencial y cinética, $K_2 - K_1 = -U_2 + U_1$

$$E = K + U = constante$$

Aquí, como en la sección 6.2, el desplazamiento x se mide desde la posición relajada del resorte. El paso crucial de construcción de la ley de la conservación de la es expresar el trabajo W como diferencia de dos energías potenciales. Según la cual el trabajo realizado por la fuerza del resorte durante un desplazamiento de x_2 y x_1 es

$$W = \frac{1}{2}kx\frac{2}{1} - \frac{1}{2}kx\frac{2}{2}$$

Esto muestra que, si se identifica la **energía potencial elástica del resorte** como entonces el trabajo es, ciertamente, la diferencia entre dos energías potenciales.

Como en el caso de la partícula que se mueve bajo la influencia de la gravedad, se concluye que, para la partícula que se mueve bajo la influencia de la fuerza del resorte, la suma de las energías cinética y potencial elástica es constante,

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = constante$$

En el caso de movimiento unidimensional, la fuerza es conservativa siempre que se pueda expresar como una función explicita de la posición, $F_x = F_x(x)$. (observe que la fuerza de fricción no cumple con este criterio; el signo de la fuerza de fricción depende del sentido del movimiento y por tanto la fuerza de fricción no esta exclusivamente determinada por la posición de x).

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F_x(x')\,dx'$$

$$U_1 + U_2 = \int_{x_1}^{x_0} F_x(x')\,dx' + \int_{x_0}^{x_2} F_x(x')\,dx'$$

Y, por otra regla básica, la suma de una integral que x_1 a x_0 y una integral de x_0 a x_2 es igual a una sola integral de x_1 a x_2. Así

$$U_1 - U_2 = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x')\,dx'$$

Para el caso e una partícula que se mueve bajo la influencia de cualquier fuerza conservativa, la energía mecánica tota es la suma de la energía cinética y la energía potencial; como antes, esta energía mecánica total se conserva:

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = constante$$

Por la ecuación $F_x = -\frac{dU}{dx}$ se ve que la fuerza F_x es positiva siempre que el potencial sea una función decreciente de x, es decir, siempre que la derivada $\frac{dU}{dx}$ sea negativa. Por lo contrario, la fuerza F_x es negativa siempre que l potencial sea una función creciente de x, es decir, siempre que la derivada $\frac{dU}{dx}$ sea positiva.

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

MASA Y ENERGIA

La masa es una forma de energía. La cantidad de energía contenida en una cantidad m de masa se obtiene con la famosa formula de Einstein.

$$E = mc^2$$

Donde c es la rapidez de la luz en el vacío, $c = 3.0 \times 10^9\,m/s$. Eta formula es una consecuencia de la física relativa de Einstein.

Por la relación entre energía y masa en la ecuación $E = mc^2$ también tiene otro aspecto. La energía tiene masa. siempre que la energía de un cuerpo cambia, su masa (y peso) se cambia. El cambio en masa que acompaña un cambio dado de energía es

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

POTENCIA

La rapidez con la que una fuerza realiza un trabajo en un cuerpo se llama la potencia que produce la fuerza. Si la fuerza realiza una cantidad de trabajo W en un intervalo de tiempo Δt, entonces la potencia promedio es la relación $W\ y\ \Delta t$

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$$

La potencia instantánea se define mediante un procedimiento análogo al que se uso en la definición de velocidad instantánea. Se considera la cantidad de trabajo pequeña dW realizada en el intervalo de tiempo pequeño dt y se realiza la relación de estas pequeñas cantidades:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

De acuerdo con estas definiciones, el motor de su automóvil produce potencia alta si realiza una cantidad de trabajo grande sobre las ruedas en un corto tiempo. La potencia máxima que produce el motor determina la rapidez máxima de la que es capaz el automóvil, ya que a rapidez alta el automóvil pierde energía debido a la resistencia del aire a una tasa enorme y está perdida la tiene que compensar el motor. Usted podría también esperar que la potencia del motor determine la aceleración máxima de la que es capaz el automóvil. Pero la aceleración esta determinada por la fuerza máxima que ejerce el motor sobre las ruedas, y esta no se encuentra directamente relacionada con la potencia como se define arriba.

La unidad SI de potencia es el watt (W). que es la tasa de trabajo de 1 joule por segundo:

$$1\, watt = 1\, W = 1\, J/s$$

Para una potencia constante (o promedio) P aplicada a un cuerpo durante un tiempo Δt el trabajo ΔW producido es la tas por ejemplo

$$W = P\Delta t$$

Si la tasa de relación de trabajo varia con el tiempo, entonces el trabajo total ΔW realizado entre un tiempo t_1 y otro t_2 es la suma de las contribuciones infinitesimales $P\Delta t$, es decir, el trabajo realizado es la integral de la potencia en el tiempo:

$$W = \int dW = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt$$

Para ver esto considere que es un caso especial de una simple ecuación, que expresa la potencia instantánea como el producto escalar de fuerza y velocidad. Para ver esto, considere que cuando un cuerpo sufre un pequeño desplazamiento ds, la fuerza F que actúa sobre el cuerpo realizara una cantidad de trabajo

$$dW = F \cdot ds$$

o

$$dW = F\, ds \cos\theta$$

Donde θ es el angulo entre la dirección de la fuerza y la dirección del desplazamiento. La potencia instantánea producida por esta fuerza es entonces

$$P = \frac{dW}{dt} = F\frac{ds}{dt}\cos\theta$$

como ds/dt es la rapidez v, esta expresión de la potencia es igual a

$$P = Fv\ \cos\theta$$

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

EJEMPLO 1

Una pistola de juguete dispara un dardo por medio de un resorte comprimido. La constante del resorte es $k = 320\, N/m$ y la masa del dardo es de 8 g. antes de disparar, el resorte se comprime en 6 cm y se coloca el dardo en contacto con el resorte. Luego se libera el resorte. ¿Cuál será la rapidez del dardo cuando el resorte llega a su posición relajada?

Solución:

El dardo puede considerarse como una partícula que se mueve bajo la influencia de una fuerza $F_x = -kx$, con una energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. Tomando el eje x positivo a lo largo de la dirección de movimiento, el valor inicial de x es negativo ($x_1 = -6\, cm$); de igual forma, la rapidez inicial es cero. La energía inicial es:

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = 0 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + 0$$

La conservación de la energía exige que los miembros de las ecuaciones sean iguales

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}kx_1^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{k}{m} x\frac{2}{1}}$$

$$= \sqrt{\frac{320\ N/m}{.0080\ kg} \times (-.060\ m)^2} = \mathbf{12\ m/s}$$

EJEMPLO 2

En la planta hidroeléctrica con almacenaje de Brown Mountain, el agua del depósito superior fluye hacia abajo por un tubo en un largo conducto vertical. El tubo termina 330 m debajo del nivel de agua del depósito superior (lleno). Calcule la rapidez con la el agua sale de la parte más baja del tubo. Considere dos casos. a) La boca inferior del tubo está totalmente abierta, de modo que el tubo no impide el movimiento descendente del agua, y b) la boca inferior del tubo está cerrada, salvo por un pequeño orificio a través del cual sale el agua. Ignore las pérdidas de fricción den el movimiento del agua.

Solución:

a) Si el tubo esta abierto por completo en el extremo inferior, cualquier volumen de agua simplemente cae con libertad por toda la longitud del tubo. Asi, el tubo no juega ningún papel en absoluto en el movimiento del agua y la rapidez alcanzada por el agua es la misma para un deposito suspendido en el aire con el agua saliendo y cayendo libremente desde una altura h=330m. para este movimiento en caída libre. La rapidez final v puede obtenerse por ecuaciones para movimiento uniformemente acelerado o por conservación de la energía. El resultado es
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2} \times 330m} = 80\ m/s$$
b) Para un tubo cerrado con un pequeño orificio, el movimiento de un volumen de agua desde la parte más alta del depósito superior hasta el orificio en parte más baja del tubo es complicado y desconocido. Sin embargo, puede encontrarse la rapidez final del agua recorriendo a la ley de la conservación del anergia, como se aplica al sistema consistente en todo volumen de agua en el depósito y el tubo. Considere entonces los cambio de energía que ocurren cuando una masa m de agua, por ejemplo 1 kg de agua, sale en forma vertiginosa del fondo del tubo mientras, de manera simultánea, el nivel del agua del depósito superior disminuye en forman ligera. Por lo que respecta al balance de energía, esto es efectivamente equivale a la remoción de la energía potencial de 1 kg de la parte superior del depósito y la adición de una energía cinética de 1 kg en el fondo del tubo. Toda el agua que hay en dos puntos intermedios, en el tubo y el depósito tiene la misma energía que tenía antes. Por tanto, la conservación de la energía

exige que la energía cinética de la masa m de agua que sale del fondo del tubo sea igual a la energía potencial de una masa m en la parte superior:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

Esto produce nuevamente

$$v = \sqrt{2gh} = 80\, m/s$$

EJEMPLO 3

Algunos fanáticos, en busca de emociones peligrosas, saltan desde puentes altos o torres con cuerdas de bungee (largas cuerdas de caucho) amarradas a sus tobillos. Considere un saltador con una masa de 70 kg con una cuerda de 9.0 m atada a sus tobillos. Cuando se estira, esta cuerda puede considerarse como un resorte con constante de resorte de 150 N/m. trace la curva de energía potencial para el saltado y, a partir de esta curva, calcule el punto de retorno del movimiento, es decir, el punto en el que la cuerda estirada detiene el movimiento descendente del saltador.

Solución:

Conviene colocar el eje x verticalmente hacia arriba, con origen en el punto en el que la cuerda se pone tensa es decir, 9.0 m debajo del punto de salto. La función de la energía potencial entonces consiste en dos regiones para $x > 0$, la cuerda de caucho esta la laxa, y la energía potencial es exclusivamente gravitacional:

$$U = mgx\ para\ x > 0$$

Para $x < 0$ la cuerda de caucho se estira y la energía potencial es una suma de las energías potenciales gravitacionales y elásticas:

$$U = mgx + \frac{1}{2}kx^2\ para\ x < 0$$

Con los números especificados para este problema

$$U = 70\, kg \times 9.81\, m/s^2 \times x$$

$$= 687x\ para\ x > 0$$

Y

$$U = 70\, kg \times 9.81 \frac{m}{s^2} \times x + \frac{1}{2} \times 150\, N/m \times x^2$$

$$= 687x + 75x^2\ para\ x < 0$$

Donde x esta en metros y U en joules. En el punto de salto de x=+9.0m, la energía potencial es de $U = 678x = 687 \times 9.0\,J = 6\,180\,J$.

Puede calcularse con precisión la posición del punto inferior de retorno $(x < 0)$ igualando la energía potencial en el punto con la energía potencial inicial:

$$678\text{x} + 75x^2 = 6\,180\,J$$

Esto genera una ecuación cuadrática para la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$75x^2 + 687x - 6\,180 = 0$$

Esta tiene solución usual

$$x = \frac{-687 \pm \sqrt{(687)^2 + 4 \times 75 \times 6\,180}}{2 \times 75}$$

$$= -14.7\,m \approx 15\,m.$$

EJEMPLO 4

En la planta hidroeléctrica con almacenamiento por bombeo de Brown Mountanin, la altura promedio del agua en el depósito superior es de 320 m sobre el inferior, y el depósito superior tiene una capacidad de $1.9 \times 10^7\,m^3$ de agua. expresada en $kW \cdot h$ ¿ cuál es la energía potencial gravitacional disponible para convertirla en energía eléctrica?

Solución:

Un metro cubico de agua tiene 1000 kg. Por tanto, la masa total de agua es $1.9 \times 10^{10}\,m^3\,kg$ y la energía potencial gravitacional es:

$$U = mgh = 1.9 \times 10^{10}\,m^3 \times 9.81\frac{m}{s^2} \times 320m = 6.0 \times 10^{13}\,J$$

Expresando en $kW \cdot h$, esto equivale a

$$6.0 \times 10^{13}\,J \times \frac{1kW \cdot h}{3.6 \times 10^6\,J} = 1.7 \times 10^7\,kW \cdot h$$

EJEMPLO 5

La caloría que usan los dietistas para expresar la equivalencia de energía de diferentes alimentos es realmente una kilocaloría o una caloría grande. Para medir la energía equivalente de algún tipo de alimentos, por ejemplo el azúcar, se coloca una muestra en un calorímetro de bomba, un recipiente cerrado lleno de oxigeno a alta presión. La muestra se enciende y se quema totalmente. El número de calorías liberadas en esta reacción química, por ejemplo 4.1 kcal para 1.0 g de azúcar, expresa la cantidad máxima de energía que puede extraerse de este alimento. El cuerpo humano no necesariamente quema el alimento en forma completa y los músculos no convierten toda la energía disponible en energía mecánica.

Si usted come una cucharada de azúcar (4g) ¿Cuál es la altura máxima a la cual esto permite subir por una escalera? suponga que su masa es 70 kg.

Solución:

Como 1.0 g de azúcar libera 4.1 kcal de energía, el equivalente de energía potencial gravitacional es

$$4.0 \times 4.1\, kcal = 16.4\, kcal = 16.4\, kcal \times 4.18 \times 10^{3} \frac{J}{kcal} = 6.9 \times 10^{4} J$$

Cuando usted sube por una escalera a una altura y, esta energía se convierte en energía potencial gravitacional

$$mgy = 6.9 \times 10^{4} J$$

De lo cual

$$y = \frac{6.9 \times 10^{4} J}{mg} = \frac{6.9 \times 10^{4} J}{70\, kg \times 9.81\, m/s^{2}} = \mathbf{100\ m}$$

EJEMPLO 6

Como ejemplo de la pequeña pérdida de masa en una reacción química, considere la energía de amarre del electrón en el átomo de hidrogeno (un protón y un electrón), que es de 13.6 eV. ¿Cuál es la perdida fraccional de masa cuando un electrón es capturado por un protón y se deja escapar la energía de amarre?

Solución:

En joules, la energía de amarre es 13.6 eV $\times 1.60 \times 10^{-19} \frac{J}{eV} = 2.18 \times 10^{-18} j$. La perdida de masa que corresponde a esta energía de amarre es

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^{2}} = \frac{2.18 \times 10^{-18} j}{(3.0 \times 10^{-18}\, m/s)^{2}} = 2.42 \times 10^{-35} kg$$

Como la masa de un proton y un electron juntos es de $1.67 \times 10^{-27} kg$, la perdida fraccional de masa es

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{2.42 \times 10^{-35} kg}{1.67 \times 10^{-27} kg} = 1.45 \times 10^{-8}$$

Esto es alrededor de una millonésima de uno por ciento.

EJEMPLO 7

Una caja de elevador tiene una masa de 1000 kg. ¿Cuántos caballos de fuerza debe aplicar el moto al elevador para que suba la caja a una tasa 2.0 m/s? el elevado no tiene contrapeso.

Solución:

El peso del elevador es $\omega = mg = 1000\,kg \times 9.81\frac{m}{s^2} \approx 9\,800\,N$. Por medio del cable del elevador, el motor debe ejercer una fuerza hacia arriba igual al peso para subir al elevador a una rapidez constante. Si el elevador sube una distancia Δy, el trabajo que realiza la fuerza es

$$W = F\Delta y$$

Para obtener la potencia o la tasa de trabajo, debe dividirse entre el intervalo de tiempo Δt

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F\Delta y}{\Delta t} = F\frac{\Delta y}{\Delta t} = Fv$$

Donde $v = \Delta y/\Delta t$ es la rapidez del elevador. Con $F = 9\,800\,N\ y\ v = 2.0\frac{m}{s}$, se encuentra

$$P = Fv = 9\,800\,N\ \times 2.0\frac{m}{s} = 2.0 \times 10^4 W$$

Con 1 hp=746 , esto es igual a

$$P = 2.0 \times 10^4 W\ \times \frac{1\,hp}{746\,W} = \boldsymbol{27\,hp}$$

EJEMPLO 8

Cada uno de los cuatro generadores de la planta hidroeléctrica de Brown Mountain genera 260 MW de potencia eléctrica. Al generar esta potencia, ¿a qué tasa la planta toma agua del depósito superior? ¿Cuánto dura un depósito lleno? Véase los datos en el ejemplo 4

Solución:

Se supone que toda la energía potencial del agua en el depósito superior, a una altura de 320 m, se convierte en energía eléctrica. La potencia eléctrica

$$4 \times 260 \times 10^6 W = 1.0 \times 10^9 W$$

Debe entonces ser igual al negativo de la tasa de cambio de la energía potencial

$$P = \frac{dU}{dt} = -\frac{dm}{dt} gh$$

De la cual se obtiene la rapidez de cambio de masa,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P}{gy} = -\frac{1.0 \times 10^9 W}{9.81 \frac{m}{s^2} \times 320m} = 3.3 \times 10^5 kg/s$$

Expresada como volumen de agua, esto es equivalente a un flujo de descarga de 330 m^3 por segundo. A este caudal los $1.9 \times 10^7 m^3$ de agua en el deposito duraran

$$\frac{1.9 \times 10^7 m^3}{\frac{330\, m^3}{s}} = \mathbf{5.7 \times 10^5 s = 16\ h}$$

Como se menciono en el ejemplo 4, hay también pérdidas por fricción. como resultado, el depósito se vaciara en realidad 30% mas rápidamente que esto, es decir, en poco menos de medio día.

24 – Antes de que se construyeran los relojes con precisión de largo plazo, se propuso que los navegadores marinos usaran el movimiento de las lunas de Júpiter como reloj. Las lunas Io, Europa y Ganimedes tienen radios orbitales de $422x10^3$, $671x10^3$ y $1070x10^3$ km, respectivamente. Cuáles son los periodos de las orbitas de estas lunas? La masa de Júpiter es de $1.9x10^{27}$ kg.

$T^2 = (4\pi^2 r^3) / (GM_J) \Rightarrow T = [\ (4\pi^2 r^3) / (GM_J)\ ]^{1/2} = \{\ (4\ \pi^2) / [(6.67x10^{-11}\ N \bullet m^2/kg^2)(1.9x10^{27}\ kg)]\ \}^{1/2}\ r^{3/2}$

$T = 1.76x10^{-8} r^{3/2}$

Moon	r (m)	T (s)	T (días)
Io	*4.22E + 8*	*1.53E + 5*	*1.77*
Europa	*6.71E + 8*	*3.07E + 5*	*3.55*
Ganimedes	*1.07E + 9*	*6.18E + 5*	*7.15*

32 – El sistema de estrellas binarias PSR 1913 + 16 consiste en dos estrellas de neutrones que orbitan con un periodo de 7.75 h alrededor de su centro de masa, que está en el punto medio entre las estrellas. Suponga que las estrellas tienen masas iguales y que sus orbitas son circulares con un radio de $8.67x10^8$m.

a) Cuáles son las masas de las estrellas?
b) Cuáles son sus rapideces?

$F = GMm / (2R)^2$

$Mv^2 / R \Rightarrow GM\ 4R = v^2$

$T = 2\pi R / v$

$T^2 = 4\pi^2 R^2 / v^2 = 16\pi^2 R^3 / GM$

$M = 16\pi^2 R^3 / GT^2$

a) $M = 16\pi^2 (8.67x10^8)^3 \ m^3 / [(6.67x10^{-11} \ m^3/kgs)(7.75 \bullet 3600s)^2] = \underline{1.98x10^{30} \ kg}$

b) $V = 2\pi R / T = 2\pi(8.67x10^8 m) / (7.75 \bullet 3600s) = \underline{1.95x10^3 \ m/s}$

34 – Un Sistema de estrellas binaria consiste en dos estrellas de masas m_1 y m_2 que orbitan una alrededor de la otra. Suponga que las orbitas de las estrella son circulares de radios r_1 y r_2, centradas en el centro de masa (figura 9.33). El centro de masa en un punto entre ambas estrellas tal que los radios r_1 y r_2 están en la relación $r_1/r_2 = m_2/m_1$. Demostrar que el periodo del movimiento orbital es:

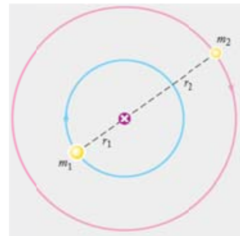


FIGURE 9.33 A binary star system. The orbits are circles about the center of mass.

$T^2 = [4\pi^2 / G(m_1 + m_2)] \ (r1 + r2)^3$

$\text{Estrella}_1 = m_1 v_1^2/r_1 = G \ m_1 m_2/(r_1 + r_2)^2$

$\text{Estrella2} = m_2 v_2 2/r_2 = G \ m_1 m_2/(r_1 + r_2)^2$

$v_1 = 2\pi r_1 / T \quad , \quad v_2 = 2\pi r_2 / T$

$4\pi^2 r_1 / T^2 = Gm_2 / (r_1 + r_2)^2 \quad , \quad 4\pi^2 r_2 / T^2 = Gm_2 / (r_1 + r_2)^2$

$4\pi^2 \ (r_1 + r_2) / T^2 = G \ (m_1 + m_2) / (r_1 + r_2)^2$ o $\underline{T^2 = 4\pi^2 \ (r_1 + r_2)^3 / G(m_1 + m_2)}$

9.1) Dos Buques petroleros, cada uno con una masa de 700 000 toneladas métricas, están separados por una distancia 2.0 km ¿Cuál es la fuerza Gravitacional que cada uno ejerce sobre otro? Trátelos como partículas.

F= GMm/r^2

--→ 6.67x10^-11 Nm^2/kg^2 x 7 x10^8 kg/(2000m)^2 = 8.2 N

9.35) El sistema binario cygnus x-1 consiste en 2 estrellas que orbitan alrededor de su centro de su centro de centro de masa bajo la influencia de sus fuerzas gravitacionales mutuas. El periodo orbital del movimiento es de 5.6 días. Una de las estrellas es una supergigante con una masa de 25 veces el sol . Se cree que la otra estrella es un agujero negro con una masa de alrededor de 10 veces la masa del sol. A partir de la información dada, determine la distancia entre las estrellas ;suponga que las orbitan de ambas estrellas son circulares.

Separación entre estrellas = d

r1/r2= (10/25) Ms --→ r1 = 2/5 r2
d...=r1+r2 =7/5 r2

Calculamos la atracción gravitacional la cual provee la fuerza centrípeta que las mantiene en órbita:

F=G(25Ms)(10Ms)/d^2

Calculamos para el 10 Ms del hoyo negro que orbita a distancia r2 con periodo T

F=G(25Ms)(10Ms)/d^2 =(10Ms)V^2/r^2 = (10Ms)(4pi^2 r2)/ T^2

Sustituyendo d en términos de r2 y resolviendo para r2 obtenemos que :

r2= ((625GMsT^2)/196pi^2)^1/3
r2={[625(6.67 x10^-11N.m^2/Kg^2)(1.99x10 ^30 Kg)(4.84x10^5s)^2]/(196pi^2}^(1/3)
r2= 2.16x10^10 m
sustituimos en
d= 7/5 * r2 = 3 x10 ^10 ---→ separación entre las estrellas

9.43) El Cometa Hale-Bopp fue espectacularmente visible en la primavera de 1997 y puede ser el cometa más visto de la historia. Su distancia de perihelio fue de 137x10^6 km y su periodo orbital es de 2380 años. ¿Cuál es su distancia de afelio? ¿Cómo se compara esta con la distancia media de Plutón al sol?

Fórmula utilizada: ((GMsT^2)/4pi^2)^1/3

T(periodo)= 2380 yr= 7.326 x 10^10s

a={[(6.67 x10^-11N.m^2/Kg^2)(1.99x10 ^30 Kg)(7.326x10^10)^2]/(4pi^2}^(1/3)

a=2.67 x 10^13 m

Ya sabemos que rmin+rmax =2a

Entonces podemos deducir que rmax=2a-rmin

rmax= 2(2.67x10^13 m)-1.37x10 ^11 m --→ rmax5.33x10^13 m----(5.33x10 ^13)/1000= 5.33x10^10 km

Plutón distancia del sol

Perihelio= 4.44 billones de km

Afelio= 7.38 billones de km

Distancia media = 5 934 456 500 km ---→ comparamos con 5.33x10^10 = dividimos y obtenemos 0.1113 por lo cual sería aproximadamente 11 veces la distancia media orbital de Plutón al sol.

7- La estrella más cercana a Alfa Centauri, a una distancia de 4.4 años luz de nosotros. La masa de esta estrella es 2.0x10^30 kg.
Compare la fuerza gravitacional que ejerce Alfa Centauri sobre el sol con la que la tierra ejerce sobre el sol. ¿Cuál fuerza es mayor?

F= GMm/ r^2

Falfa= (6.67x10^-11 N.m^2/kg^2)(2.0x10^30kg)(1.99x10^30kg)/[(4.4ly)(9.45x10^15m/ly)]^2

=1.5x10^17 N.

Ftierra=(6.67x10^-11 N.m^2/kg^2)(5.98x10^24 kg)(1.99x10^30kg)/(1.50x10^11m)^2

=3.5x10^22 N.

10- En algún lugar entre la tierra y el sol, hay un punto en el que la atracción gravitacional de la tierra equilibra exactamente a la del sol. ¿A qué fracción de la distancia Tierra-Sol ocurre esto?

$GMsm/x^2=GMem/(R-x)^2 \longrightarrow (R-x)^2=x^2\ \frac{Me}{Ms}$

x^2($1 - \frac{Me}{Ms}$)- 2Rx+R^2=0

X=$\frac{2R \pm \sqrt{4R^2 - 4\left(1-\frac{Me}{Ms}\right)R^2}}{2(1-\frac{Me}{Ms})}$ $\rightarrow$ x=R± $\frac{\sqrt{Me/Ms}}{(1-\frac{Me}{Ms})}$

(5.98X10^24/1.99X10^30)=3.01X10^-6

X=(1-$\sqrt{3.01X10^6)}$ R=0.998R

38-El cometa Halley. Orbita alrededor del sol en una órbita elíptica (El cometa llego a su perihelio en 1986). Cuando el cometa está en el perihelio, su distancia al sol es de 8.48x10^10 m y su rapidez es de 5.45x10^4 m/s. Cuando el cometa está en el afelio, su distancia es de 5.28x10^12 m. ¿Cuál es su rapidez en el afelio?

Mv1r1=mv2r2→v1r1=v2r2

V1=$\frac{V2r2}{r1}$ = (8.75x10^10 m) (5.46x10^4 m/s)/ (5.26x10^12)m =908m/s

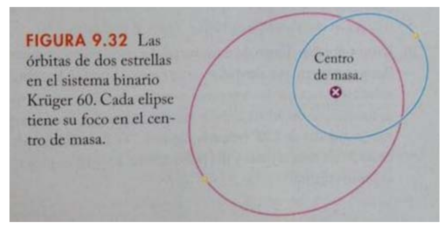
13.- Una masa de 7.0 Kg esta sobre el eje x en x = 3.0 m y una masa de 4.0 Kg esta sobre el eje y en y = 2.0 m ¿Cuál es la fuerza gravitacional resultante (Magnitud y Direccion) debida a estas dos masas sobre una tercera masa de 3.0 Kg ubicada en el origen?

$$\boldsymbol{F}=\frac{(6.67384x10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{Kg^2})(3\,Kg)(7m)}{(3m)^2}\boldsymbol{i}+\frac{(6.67384x10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{Kg^2})(3Kg)(4m)}{(2m)^2}\boldsymbol{j}=(1.56x10^{-10}N)\boldsymbol{i}+(2x10^{-10}N)\boldsymbol{j}$$

$$Magnitud\ F=\sqrt{(1.56)^2(2)^2}x10^{-10}N=2.5x10^{-10}N$$

$Direccion\ \theta=tan^{-1}\frac{2}{1.56}=52°$ en este caso se omitio el $x10^{-10}$, para poder sacar el angulo.

33.- La figura muestra dos estrellas que orbitan alrededor de su centro común de masa en un sistema binario Kruger 60. El centro de masa esta en un punto tal entre las estrellas que las distancias de las estrellas a este punto están en razón inversa de sus masas. Mida los tamaños de sus orbitas y determine la relación de sus masas.



El centro de masa esta dado por $m_1x_1+m_2x_2$, $\frac{m_1}{m_2}=\frac{x_1}{x_2}$ donde x_1, x_2, esto es proporcional al radio, por lo tanto, $\frac{m_1}{m_2}=\frac{2.2}{1.4}=1.6$

41.- Calcule los periodos orbitales del Sputnik I y del Explorer I a partir de sus distancias de apogeo y perigeo indicadas en la tabla.

TABLA 9.3 LOS PRIMEROS SATÉLITES TERRESTRES ARTIFICIALES

SATÉLITE	MASA	DISTANCIA MEDIA DESDE EL CENTRO DE LA TIERRA (SEMIEJE MAYOR)	DISTANCIA DE PERIGEO	DISTANCIA DE APOGEO	PERIODO
Sputnik I	83 kg	6.97×10^3 km	6.60×10^3 km	7.33×10^3 km	96.2 min
Sputnik II	3000	7.33	6.61	8.05	104
Explorer I	14	7.83	6.74	8.91	115
Vanguard I	1.5	8.68	7.02	10.3	134
Explorer III	14	7.91	6.65	9.17	116
Sputnik III	1320	7.42	6.59	8.25	106

Tomamos la tercera ley de Kepler para orbitas elipticas:

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2\alpha^3}{GM_s}}$$

Para el Sputnik I; $T=\sqrt{\frac{4\pi^2(6.97x10^6m)^3}{(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg^2})(5.98x10^{24}Kg)}}=5.79x10^3s$

Para Explorer I; $T=\sqrt{\frac{4\pi^2(7.83x10^6m)^3}{(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg^2})(5.98x10^{24}Kg)}}=6.89x10^3s$

20. El satélite espía *Midas II* se lanzó en órbita circular a una altura de 500 km sobre la superficie de la Tierra. Calcule el periodo orbital y la rapidez orbital del satélite.

28. El Sol hace una rotación aproximadamente cada 26 días. ¿Cuál es el radio de una órbita "heliosincrona", es decir, una órbita de un satélite que permanezca sobre el mismo punto del Sol?

30. Un planeta del tamaño de Júpiter orbita alrededor de la estrella SS Cancri con un radio orbital de $8.2 \times 10^{11} m$. El periodo orbital de este planeta es de 13 años ¿Cuál es la masa de la estrella SS Cancri? ¿Cómo se compara esto con la masa del Sol?

15.-Encuentre la aceleración de la luna debida a la atracción de la tierra. Exprese su resultado en unidades de g estándar.

$a = (Gm_t m_l / r^2 m_l) = ((6.67x10^{-11} N * \frac{m2}{Kg2})(5.98x10^{24} Kg))/(3.84x10^8 m)^2$

$$a = 2.71x10^{-3}\ m/s^2$$

$$a = \frac{2.71x10^{-3}}{(9.81)} = 2.76x10^{-4} g$$

16.- Si se pudiera construir una –torre al cielo- de 2000km de altura sobre la superficie de la tierra, ¿Cuál sería el peso de usted de pie sobre la cúpula de esta torre? Suponga que la torre está ubicada en el polo sur. Exprese su respuesta en términos de su peso en la superficie en la tierra.

$W_{torre} = mg_{torre} = m(Gm_{tierra}/(R_{tierra}+h_{torre})^2$

$W_{superficie} = mg_{superficie} = m(Gm_{tierra}/r^2_{tierra})$

$W_{torre}/W_{superficie} = R^2_{tierra}-(R_{tierra}+h_{torre})^2 = (6.357x10^6 m)^2/(6.357x10^6 m^2+2.0x10^6 m)^2 = 0.578$

36.-Un sistema hipotético de estrellas triples que consiste en tres estrellas que orbita una alrededor de su centro de masa. Por simplicidad, suponga que las estrellas tienen masas iguales y que se mueven en una órbita circular común, manteniendo una separación angular de 120. En términos de la masa M de cada estrella y del orbital R, ¿Cuál es el periodo del movimiento?

$$F = (GM^2\sqrt{3})/a^2$$

$$a/2 = Rcos30 = (R\sqrt{3})/2$$

$$a = R\sqrt{3}$$

$$\frac{GM^2}{R^2\sqrt{3}} = \frac{MV^2}{R} = \frac{4\pi^2 MR}{P^2}$$

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3\sqrt{3}}{GM}}$$

4.- Calcule el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de venus, mercurio y marte. Use los datos sobre masas planetarias y radios que se dan en la tabla impresa en las guardas del libro.

Venus: a = 6.67 × 10^−11 Nm^2 /kg^2 × 4.87 × 10^24kg/(6.05 × 10^6) ^2 m2 = 8.9 m/s2

Mercurio: a = 6.67 × 10^−11Nm^2 /kg^2 × 3.30 × 10^23kg/(2.44 × 10^6) ^ 2 m2 = 3.70 m/s2

Marte: a = 6.67 × 10^−11 Nm^2 /kg^2 × 6.42 × 10^23kg/(3.397 × 10^6) ^ 2 m2 = 3.71 m/s2

5.- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional que la luna ejerce sobre usted? La masa del sol y la luna y sus distancias se presentan en las guardas del libro: suponga que su masa es de 70 kg. Compare estas fuerzas con su peso. ¿Por qué no siente usted estas fuerzas?

Para el sol (6.67 × 10^-11 N m /kg)(1.99 × 10^30 kg)(70 kg)/ (1.50 × 10^11 m) ^2= 0.41 N

Para la luna (6.67 × 10^-11 N m /kg)(7.35 × 10^22 kg)(70 kg)/ (3.84 × 10^8 m) ^2 =2.3 × 10 N

La fuerza ejercida de la tierra sobre la persona es (70 kg) (9,81 m / s^2)= 687 N. así que vemos que la fuerzas ejercidas por el sol y la luna son muy pequeñas en comparación a la que ejerce la tierra a un así las fuerzas aumentaran no las percibiríamos por que la tierra está en caída libre hacia el sol más nosotros estamos siendo afectados por la fuerza que ejerce la gravedad sobre nosotros

Ejercicio 6.- **Calcule la fuerza gravitacional entre nuestra galaxia y la galaxia Andrómeda. Sus masas son $2.0 \text{ X } 10^{11}$ y $3.0 \text{ X } 10^{11}$ veces la masa del Sol, respectivamente, y la distancia entre ambas es de $2.2 \text{ X } 10^{6}$ años luz. Trate a ambas galaxias como masas puntuales.**

Formulas: $\mathrm{F} = \frac{\mathrm{GMm}}{r^2}$

Equivalencias de Años Luz, la distancia que recorre en un año: $\frac{3 \text{ X } 10^8 m}{s}(3.15 \text{ X } 10^7 \text{ segundos}) = 9.45 \text{ X } 10^{15}\text{m}$

$$\mathrm{F} = \frac{(6.67 \text{ X } 10^{-11}\mathrm{N}.m^2/Kg^2)(2 \text{ X } 10^{11})(3 \text{ X } 10^{11})(1.99 \text{ X } 10^{30}/\mathrm{Kg}) \quad ^2}{\left[2.2\, X\ 10^6 años\ luz(\frac{9.45 \text{ X } 10^{15} m}{años\ luz})\right] \quad ^2}$$

= $3.8\ \text{ X } 10^{28} N$

Ejercicio 11.- **Compare el peso de una masa de 1 kg en la superficie de la Tierra con la fuerza gravitacional entre el Sol y otra estrella de la misma masa ubicada en el extremo lejano de nuestra galaxia, aproximadamente a $5 \text{ X } 10^{20}$ m.**

El peso expresado de 1 kilogramo en nuestro planeta es de 9.81 N.

Fuerza Gravitacional entre el Sol y otra estrella:

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{G}M^2 s}{R^2} = \frac{(6.67 \text{ X } 10^{-11}\mathrm{N}.m^2/Kg^2)(1.99 \text{ X } 10^{30}/\mathrm{Kg}) \quad ^2}{[5\, X\ 10^{20}\ m)] \quad ^2} = 1\, X\ 10^9 N$$

Ejercicio 24.- **La tabla 9.2 es una lista de algunas de las Lunas de Saturno. Sus orbitas son circulares.**

a) A partir de la información dada, calcules los periodos y las rapideces orbitales de estas lunas.

T ⍰⍰$(2\pi$⍰$/\ \sqrt{GM})\ r^{3/2}$ V= $2\pi r/T$ por lo tanto, $2\pi/\ \sqrt{GMs}$ = $T/r^{3/2}$ = $3.22 \text{ X } 10^{-8} \mathrm{s}/m^{3/2}$

Luna	Distancia de Saturno	Periodo	Rapidez Orbital
Tethis	$2.95\ \text{ X } 10^5 km$	1.89 dias	$1.14\ \text{ X } 10^4 m/s$
Dione		3.77	
2.73dias		$1\ \text{ X } 10^4 m/s$	

Rhea 5.27
4.51 días $8.49\ \mathrm{X}\ 10^{3} m/s$

Titan 12.22
15.91 días $5.6\ \mathrm{X}\ 10^{3} m/s$

Iapetus 35.60 79.10
días $3.27\ \mathrm{X}\ 10^{3} m/s$

b) Calcule la masa de Saturno.

$2\pi/\ \sqrt{GMs}$ = 3.22 $\mathrm{X}\ 10^{-8}$s/$m^{3/2}$,

GMs = $\frac{4\pi^2}{[3.22\ X\ 10^{-8})]^{2}} m^2/s^2$

Ms = $4\pi^2/[(3.22\ \mathrm{X}\ 10^{-8})^{2}\ 6.67\ \mathrm{X}\ 10^{-11}]$ = $5.57\ \mathrm{X}\ 10^{26} kg$

19.- Mimas, una pequeña luna de Saturno, tiene una masa de $3.8 \times 10^{19}\, kg$ y un diámetro de $500\, km$ ¿Cuál es la velocidad ecuatorial máxima con la que puede hacerse girar esta luna sobre su eje sin que se desprendan pedazos de roca suelta de su superficie en el ecuador?

$G = 6.67 \times 10^{11}\, N \dfrac{m^2}{kg^2}$
$M = 3.8 \times 10^{19} kg$
$R = 2.5 \times 10^5$

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{\left(6.67 \times 10^{-11} N \dfrac{m^2}{kg^2}\right)(3.8 \times 10^{19} kg)}{(2.5 \times 10^5 m)^2} = 0.0406\ \frac{m}{s^2}$$

Por lo que su velocidad máxima deberá ser:

$$v_{máx} = \sqrt{gR} = \sqrt{(0.0406 \frac{m}{s^2})(2.50 \times 10^5 m)} = 101\ \frac{m}{s}$$

39.- El Explorer I, el primer satélite artificia, estadounidense tenía una órbita elíptica alrededor de la Tierra con una distancia de perigeo de $60.74 \times 10^6 m$ *y una distancia de apogeo* $8.91 \times 10^6 m$*. La rapidez de este satélite era de* 6.21×10^3 *en el apogeo. Calcule la rapidez en el perigeo.*

Perigeo=$60.74 \times 10^6 m$
Apogeo=$8.91 \times 10^6 m$
Rapidez apogeo=6.21×10^3

$$v = \frac{(8.91 \times 10^6)(6.21 \times 10^3)}{(6.74 \times 10^6)}$$
$$v = 8.2 \times 10^3 \frac{m}{s}$$

42.-La distancia de afelio para Saturno es de $1510 \times 10^6 km$*; su distancia de perihelio es de* $1350 \times 10^6 km$*. Por la primera ley de Kepler, el sol está en un foco de la elipse. ¿A qué distancia del sol está el otro foco? ¿Cómo se compara esto con el radio orbital de Mercurio?*

$Afelio$=$1510 \times 10^6 km$
$Perihelio$=$1350 \times 10^6 km$

$$(1510 \times 10^6 km + 1350 \times 10^6 km) - 2(1350 \times 10^6 km) = Dist. entre\ focos$$

$$d = 160 \times 10^6 km$$

Saturno se encuentra a unos 57.9×10^6 km *del sol, lo que es aproximadamente una tercera parte de la distancia interfocal de la órbita de Saturno.*

9- Calcule el valor de la aceleración debida a la gravedad en las superficies de Júpiter, Saturno y Urano. Use los valores de las masas planetarias y los radios dados en la tabla.

Planeta	M (kg)	R(m)	G (m/s^2)
Júpiter	1.90 e +27	7.14e +07	24.9
Saturno	5.67 e+26	6.00e+07	10.5
Urano	8.7 e+ 25	2.54e+07	8.99

34- Un sistema de estrellas binaria consiste en dos estrellas de masas m_1 y m_2 que orbitan una alrededor de la otra. Suponga que las orbitas de las estrellas son circulares de radios r_1 y r_2, centradas en el centro de la masa. El centro de la masa es un punto entre ambas estrellas tal que los radios r_1 y r_2 están en la relación $r_1/r_2 = m_1/m_2$. Demuestre que el periodo del movimiento del orbital es:

$$T^2 = 4л / G(m_1+m_2) \quad (r_1+r_2)^3$$

$M_1 v_1 /r_1 = G m_1 m_2/(r_1+r_2)^2$ $M_1 v_1 /r_1 = G m_1 m_2/(r_1+r_2)^2$

$V_1 = 2 л r_1 /T$ $V_2 = 2 л r_1 /T$

$$4л^2 r_1/ T^2 = G m_2 / (r_1+r_2)^2$$

$$4л^2 r_2/ T^2 = G m_1 / (r_1+r_2)^2$$

$$\mathbf{4л^2 \quad r_1+r_2 /T^2 \quad = G m_1+m_2 /(r_1+r_2)^2}$$

44- La órbita de la tierra se desvía ligeramente de lo circular: en el afelio, la distancia tierra sol es de 1.52e^8 km y el perihelio es de 1.47e^8 km. ¿ Por qué factor es la rapidez de la Tierra mayor en el periodo en el perihelio que en afelio?

$R_{min} v_{max} = r_{max} v_{min} \longrightarrow v_{max}/v_{min} = r_{max}/ r_{min} = 1.52/1.47 = 1.03$ km

27. Un asteroide esta en órbita circular de dos diámetros solares del centro del Sol. ¿Cuál es su periodo orbital en días?

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_s} \therefore T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_s}}$$

El radio r es igual a 4 veces el radio del sol. r_{sol} =6.96x10^8 m, M_{sol} =1.99x10^{30} kg

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_s}} \rightarrow T\sqrt{\frac{4\pi^2(4(6.69x10^8 m))^3}{(6.67x10^{-11}\,Nm^2/kg^2)(1.99x10^{30}kg)}} = 8.01x10^4\ s =\ 0.927\ dias$$

12. Cada una de dos esferas adyacentes de 1.5 kg cuelga del techo por un cordón. La distancia centro a centro entre las esferas es de 8.0 cm. ¿Que (pequeño) ángulo forma cada cordón con la vertical?

Tenemos 3 fuerzas, una fuerza dada por la masa (F=mg) que es vertical, la tensión de la cuerda (T); y una fuerza horizontal dada por la atracción.

Igualamos:

$Tcos\theta = mg\ \therefore cos\theta = \frac{mg}{t}$ $Tsen\theta = \frac{Gm^2}{d^2} \therefore sen\theta = \frac{Gm^2}{d^2T}$

Las igualamos a tangente y despejamos para sacar θ

$$\theta =\ tan^{-1}\left(\frac{Gm^2}{d^2F}\right) = tan^{-1}\frac{(6.67x10^{-11})(1.5kg)^2}{(.08)^2(14.715\,N)} = 1.59x10^{-9}\,rad$$

4. Calcule el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Venus, Mercurio y Marte.

$$a = \frac{GM}{r^2}$$

M_{Venus} = 4.87 x10^{24} kg

r_{Venus} = 6.05 x10^6 m

$$a_{venus} = \frac{(\frac{6.67x10^{-11}Nm^2}{kg^2})(4.87x10^{24}kg)}{(6.05x10^6)^2} = 8.9\ m/s^2$$

$M_{Mercurio}$ = 3.30 x10^{23} kg

$R_{mercurio}$ = 2.44 x10^{6} m

$$a_{mercurio} = \frac{(\frac{6.67x10^{-11}Nm^2}{kg^2})(3.30x10^{23}kg)}{(2.44x10^6)^2} = 3.7\ m/s^2$$

M_{Marte} = 6.42 x10^{23} kg

R_{Marte} = 3.397 x10^{6} m

$$a_{marte} = \frac{(\frac{6.67x10^{-11}Nm^2}{kg^2})(6.42x10^{23}kg)}{(3.397x10^6)^2} = 3.71\ m/s^2$$

15.-Encuentre la aceleración de la luna debida a la atracción de la tierra. Exprese su resultado en unidades de g estándar.

$a = (Gm_t m_l/r^2 m_l) = ((6.67x10^{-11}N * \frac{m2}{Kg2})(5.98x10^{24}Kg))/(3.84x10^8 m)^2$

$$a = 2.71x10^{-3}\ m/s^2$$

$$a = \frac{2.71x10^{-3}}{(9.81)} = 2.76x10^{-4}g$$

16.- Si se pudiera construir una –torre al cielo- de 2000km de altura sobre la superficie de la tierra, ¿Cuál sería el peso de usted de pie sobre la cúpula de esta torre? Suponga que la torre está ubicada en el polo sur. Exprese su respuesta en términos de su peso en la superficie en la tierra.

$W_{torre} = mg_{torre} = m(Gm_{tierra}/(R_{tierra}+h_{torre})^2$

$W_{superficie} = mg_{superficie} = m(Gm_{tierra}/r^2_{tierra})$

$W_{torre}/W_{superficie} = R^2_{tierra}\text{-}(R_{tierra}+h_{torre})^2 = (6.357x10^6 m)^2/(6.357x10^6 m^2+2.0x10^6 m)^2 = 0.578$

36.-Un sistema hipotético de estrellas triples que consiste en tres estrellas que orbita una alrededor de su centro de masa. Por simplicidad, suponga que las estrellas tienen masas iguales y que se mueven en una órbita circular común, manteniendo una separación angular de 120. En términos de la masa M de cada estrella y del orbital R, ¿Cuál es el periodo del movimiento?

$$F = (GM^2\sqrt{3})/a^2$$

$$a/2 = Rcos30 = (R\sqrt{3})/2$$

$$a = R\sqrt{3}$$

$$\frac{GM^2}{R^2\sqrt{3}} = \frac{MV^2}{R} = \frac{4\pi^2 MR}{P^2}$$

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3\sqrt{3}}{GM}}$$

7- La estrella más cercana a Alfa Centauri, a una distancia de 4.4 años luz de nosotros. La masa de esta estrella es 2.0x10^30 kg.

Compare la fuerza gravitacional que ejerce Alfa Centauri sobre el sol con la que la tierra ejerce sobre el sol. ¿Cuál fuerza es mayor?

F= GMm/ r^2

Falfa= (6.67x10^-11 N.m^2/kg^2)(2.0x10^30kg)(1.99x10^30kg)/[(4.4ly)(9.45x10^15m/ly)]^2

=1.5x10^17 N.

Ftierra=(6.67x10^-11 N.m^2/kg^2)(5.98x10^24 kg)(1.99x10^30kg)/(1.50x10^11m)^2

=3.5x10^22 N.

10- En algún lugar entre la tierra y el sol, hay un punto en el que la atracción gravitacional de la tierra equilibra exactamente a la del sol. ¿A qué fracción de la distancia Tierra-Sol ocurre esto?

GMsm/x^2=*GMem/(R-x)*^2 $\longrightarrow$ (R-x)^2=x^2 $\frac{Me}{Ms}$

x^2($1 - \frac{Me}{Ms}$)- 2Rx+R^2=0

$$x=\frac{2R\pm\sqrt{4R^2-4\left(1-\frac{Me}{Ms}\right)R\hat{}2}}{2(1-\frac{Me}{Ms})} \rightarrow x=R\pm\frac{\sqrt{Me/Ms}}{(1-\frac{Me}{Ms})}$$

(5.98X10^24/1.99X10^30)=3.01X10^-6

X=(1-$\sqrt{3.01X10\hat{}6)}$ R=0.998R

38-El cometa Halley. Orbita alrededor del sol en una órbita elíptica (El cometa llego a su perihelio en 1986). Cuando el cometa está en el perihelio, su distancia al sol es de 8.48x10^10 m y su rapidez es de 5.45x10^4 m/s. Cuando el cometa está en el afelio, su distancia es de 5.28x10^12 m. ¿Cuál es su rapidez en el afelio?

Mv1r1=mv2r2→v1r1=v2r2

V1=$\frac{V2r2}{r1}$ = (8.75x10^10 m) (5.46x10^4 m/s)/ (5.26x10^12)m =908m/s

22. Calcule la rapidez orbital de Venus a partir de los datos del ejemplo 5

Datos:

$V_2 = 30\ km/s$

$$V_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = \frac{2\pi r_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{T_2\ (T_1/T_{2)}} = V_2\,(\frac{r_1}{r_2})(\frac{T_2}{T_1})$$

$\frac{r_1}{r_2} = 0.725$

$\frac{T_2}{T_1} = 1.63$

V_1= 30(km/s)

(0.725)(1.63)= 35 km/s

26. Un satélite se pone en órbita ecuatorial con un periodo orbital de 12 horas. ¿Cuál es el radio de la órbita? ¿Cuál es la rapidez orbital? ¿Cuantas veces al día pasara el satélite sobre el mismo punto del ecuador si el satélite orbita en el mismo sentido de la rotación de la Tierra y cuantas si orbita en sentido opuesto?

12 hr x 3600 s /h = 43200 s

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} = r = \sqrt[3]{\left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{6.67x10^{-11}Nm^2}{kg^2}\right)(5.98x10^{24}kg)(43200s)^2}{4\pi^2}}$$

r = 26616130.97 m

$$V = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi \frac{(26616.13\ km)}{43200\ s} = 3.871\ km/s$$

Pasa por cualquier punto del ecuador una vez al día si viaja al contrario del sentido de la rotación pasaría 3 veces por el mismo punto.

29. El módulo de comando Apolo orbitaba alrededor de la luna. Mientras un módulo de excursión lunar visitaba la superficie. Si la órbita tiene un radio de 2x10^6 m ¿Cuántas veces por día terrestre volaba el módulo de comando sobre el módulo de excursión?

$$T = \sqrt[2]{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \frac{4\pi^2(2x10^6 m)^3}{\left(\frac{6.67x10^{-11}Nm^2}{kg^2}\right)(7.35x10^{22}kg)} = 8026.35\ s$$

Como 1 día =86,400 s, pasa cerca de 10 veces el módulo de comando sobre el módulo de excursión.

MOVIMIENTO ROTACIONAL

Movimiento de cambio de orientación de un cuerpo rigido dado un punto cualquiera de este tiene una distancia constante hacia algún punto fijo.

Un objeto rígido es un cuerpo que tiene una forma definida que no cambia, y las partículas que lo componen permanecen fijas. Un objeto rígido puede presentar dos movimientos distintos, estos movimientos son conocidos como movimiento de rotación y movimiento de traslación.

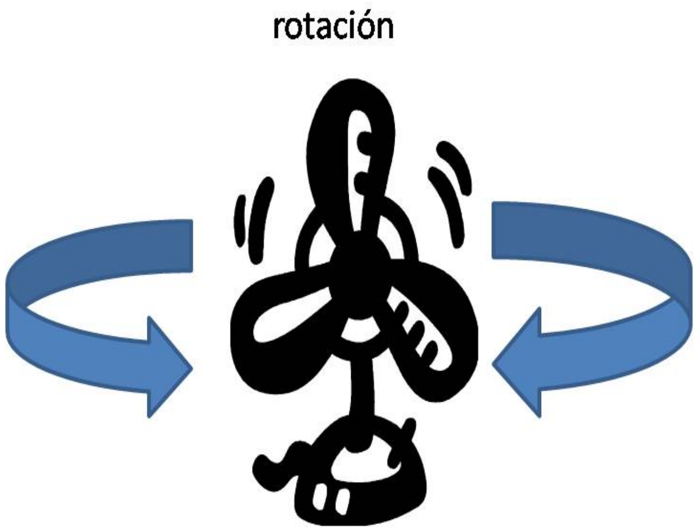


Figura 1

Movimiento de traslación

El movimiento de traslación es el más sencillo que puede realizar el sólido rígido. Desde un punto de vista geométrico, lo podemos definir del modo siguiente: Se dice que un sólido rígido se encuentra animado de un movimiento de traslación cuando todo segmento rectilíneo definido por dos puntos de aquél permanece paralelo a si mismo en el transcurso del movimiento.

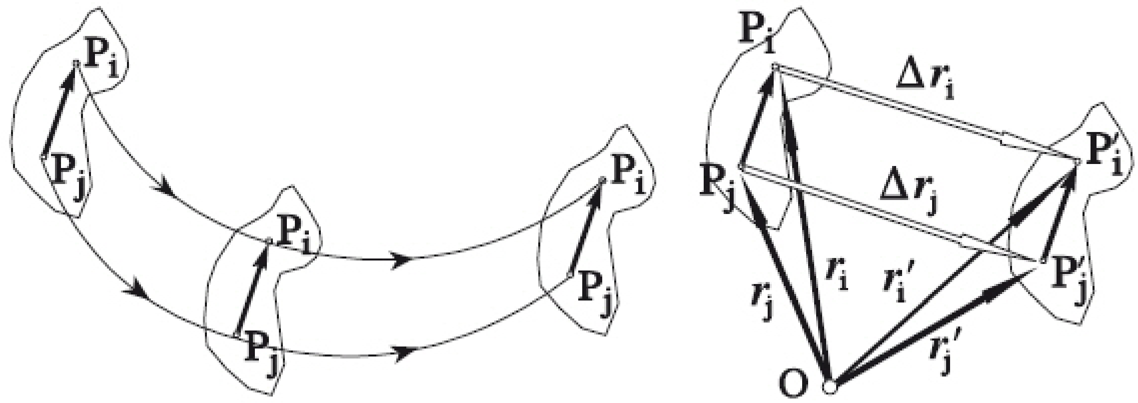


Figura 2: (a) Movimiento de traslación. (b) En el movimiento de traslación todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad

Consideremos un sólido rígido animado de un movimiento de traslación, como se muestra en la Figura 5.5(a). En virtud de la condición geométrica de rigidez, el vector $\boldsymbol{r_{ij}} = \boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r_j}$ debe mantener constante su módulo en el transcurso de cualquier movimiento y, además, en virtud de la definición geométrica del movimiento de traslación, también ha de mantener constante su dirección; entonces, siendo $\vec{\boldsymbol{c}}$ un vector constante, se puede escribir:

$$\vec{r_i} - \vec{r_j} = \vec{\boldsymbol{c}} \qquad (5.12)$$

y derivando con respecto al tiempo:

$$\vec{r_i} - \vec{r_j} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{v_i} = \vec{v_j} \qquad (5.13)$$

Constituyendo esta igualdad la condición cinemática del movimiento de traslación, esto es:

Todos los puntos de un sólido rígido animado de un movimiento de traslación tienen, en cada instante, la misma velocidad. Esa velocidad, común a todos los puntos del sólido, recibe el nombre de velocidad de traslación del sólido y debe ser considerada como un vector libre. Las mismas consideraciones pueden aplicarse a la aceleración. En consecuencia, una vez definido el movimiento de un punto cualquiera del sólido rígido que se traslada, tenemos definido el movimiento del sólido. Otra característica importante del movimiento de traslación del sólido rígido es que las trayectorias recorridas por sus diversos puntos son congruentes, es decir, una se puede obtener mediante una translación de la otra. En efecto, consideremos de nuevo dos puntos cualesquiera, $p_i \, y \, p_j$, pertenecientes al sólido, y sean r_i y r_j sus vectores de posición con respecto a un cierto origen arbitrario O. Imaginemos un desplazamiento experimentado en una traslación del sólido, de modo que los vectores de posición de esos puntos, con respecto al mismo origen O, sean ahora r'_i y r'_j respectivamente. La condición geométrica de rigidez junto con la condición geométrica que define al movimiento de traslación, se expresa en la forma:

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = \overrightarrow{r'_i} - \overrightarrow{r'_j} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{r'_i} - \vec{r}_i = \overrightarrow{r'_j} - \vec{r}_j \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{r}_i = \Delta\vec{r}_j$$

de modo que el desplazamiento experimentado por cada uno de los puntos del sólido durante un intervalo de tiempo Δt es único. De este resultado, junto con la noción de la línea curva como límite de una poligonal y de la continuidad del movimiento, se sigue la congruencia de las trayectorias recorridas por los distintos puntos del sólido rígido. Es conveniente que insistamos en que el movimiento de traslación no prejuzga forma alguna para las trayectorias de los distintos puntos que constituyen el sólido. Evidentemente, si la velocidad de traslación es constante ($v =$ cte), cada uno de los puntos del sólido recorrerá una trayectoria rectilínea con celeridad constante y todas esas trayectorias serán paralelas entre sí (movimiento de traslación uniforme). Pero, en general, la velocidad de traslación no tiene por que ser constante y la trayectoria puede ser curvilíneo. Así, por ejemplo, las trayectorias recorridas por los distintos puntos del cuerpo pueden ser circunferencias, todas ellas del mismo radio (congruentes) aunque de distinto centro. Esta situación se presenta en una noria de feria de eje horizontal, como se muestra en la Figura; la armadura de la noria gira en torno al eje (rotación), pero las barquillas suspendidas de dicha armadura, prescindiendo de pequeñas oscilaciones pendulares, experimentan una traslación con trayectoria circular.

Movimiento de rotación

Se puede decir que un sólido rígido está animado de un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo cuando todos sus puntos describen trayectorias circulares centradas sobre dicho eje y contenidas en planos normales a éste

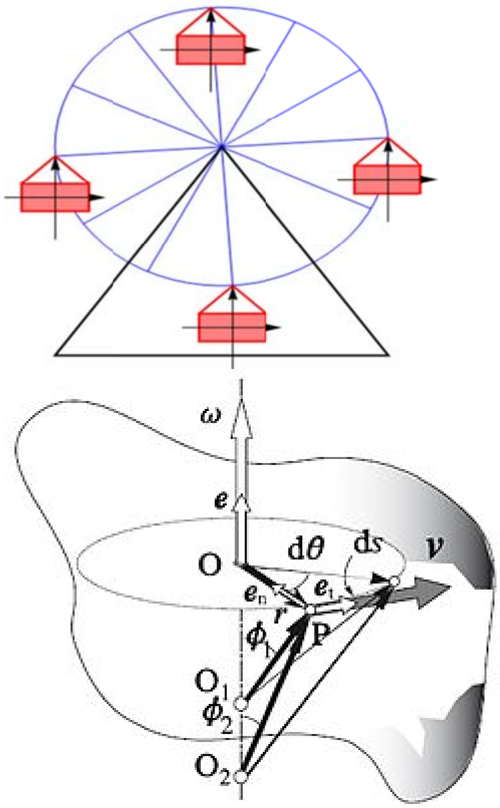


Figura 2: (a) Movimiento de traslación de la rueda de la fortuna. (b) Movimiento de rotación. El vector velocidad angular es único (invariante), pero cada punto del sólido tiene una velocidad diferente de la de los otros.

El eje de rotación puede atravesar el cuerpo o ser exterior al mismo; en el primer caso, los puntos del sólido que están sobre el eje permanecen en reposo en tanto que los demás puntos describen circunferencias en torno al eje; en el segundo caso, todos los puntos del sólido están en movimiento circular alrededor del eje exterior al sólido. En cualquier caso, la velocidad v de un punto P del sólido será tangente a la circunferencia descrita y, en un instante dado, tendrá un módulo tanto mayor cuanto mayor sea la distancia del punto al eje de rotación. Dicha velocidad viene dada por

v = veˆt $\vec{v} = v\hat{e_t}$

Siendo $\hat{e_t}$ un vector unitario (de módulo igual a la unidad) tangente a la trayectoria y v el módulo de la velocidad. Téngase en cuenta que necesariamente $\hat{e_t}$cambiará a lo largo del movimiento, ya que irá continuamente modificando su dirección hasta llegar de nuevo a la orientación original, tras completar un giro de 2π radianes.

El módulo de la velocidad, denominado celeridad, se corresponde con

$v = \frac{ds}{dt}$

Considerando s la distancia que el sólido va recorriendo a lo largo de la circunferencia. Dada la definición matemática de ángulo θ = s r , se verifica que ds = r dθ, para lo cuál habrá que expresar el ángulo en radianes (rad). De aquí se deduce que

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

El cociente $\frac{d\theta}{dt}$ recibe el nombre de celeridad angular y se designa por ω:

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

y podemos expresar la celeridad v de cualquier punto del sólido como el producto de la celeridad angular por la distancia r del punto al eje de rotación

$$v = \omega r$$

La introducción del concepto de celeridad angular es de gran importancia por la simplificación que supone en la descripción del movimiento de rotación del sólido, ya que, en un instante dado, todos los puntos del sólido poseen la misma celeridad angular, en tanto que a cada uno de ellos le corresponde una celeridad que es función de su distancia al eje de rotación. Así pues, la celeridad angular caracteriza al movimiento de rotación del sólido rígido en torno a un eje fijo. La celeridad angular se mide en radianes por segundo (rad/s).

VARIABLES ROTACIONALES

DESPLAZAMIENTO ANGULAR

Esta variable describe la cantidad de rotación, si el punto A en el disco giratorio de la figura 3 gira sobre su eje hasta el punto B, el desplazamiento angular se denota por el ángulo θ. Hay varias formas de medir ese ángulo. Ya estando familiarizado con las unidades de grados y revoluciones, las cuales están relacionadas de acuerdo con la definición

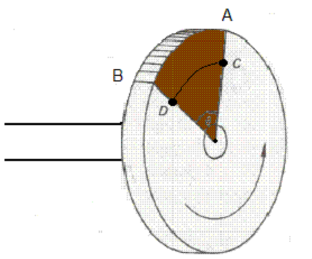


FIGURA 3. Desplazamiento angular θ se indica por la porción sombreada del disco. El desplazamiento angular es el mismo de C a D que de A a B para un cuerpo rigido.

1 rev $= 360^{\circ}$

Ninguna de estas unidades es útil para describir la rotación de cuerpos rígidos. Una medida de aplicar más fácil el desplazamiento angular es el **radian** (rad). Un ángulo de 1 rad es un ángulo central cuyo arco s es igual en longitud al radio **R.** (observe la figura 4) Es más común que el radian se defina por la siguiente ecuación

$$\theta = \frac{s}{R}$$

Donde s es el arco de un circulo descrito por el angulo θ. Puesto que el cociente s entre R es la razón de dos distancias, el radian es una cantidad sin unidades. El factor de conversión que permite relacionar radianes con grados se encuentra considerado un arco de longitud s igual a la circunferencia de un cirulo de $2\pi R$. Dicho angulo en radianes se obtiene de la ecuación

$\theta = \frac{2\pi \cancel{R}}{\cancel{R}} = 2\pi\, rad$

$\Rightarrow$ 1 rev $= 360° = 2\pi\, rad$

Donde observamos que

1 rev $= \frac{360°}{2\pi} = 57.3°$

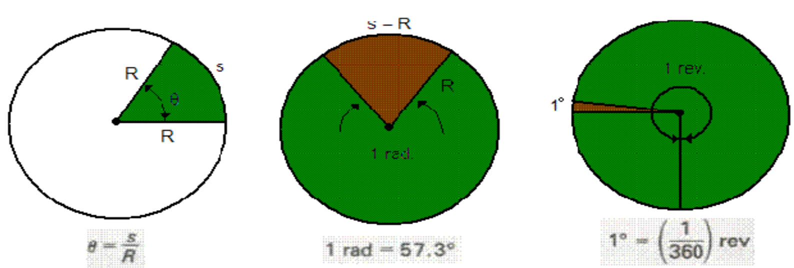


FIGURA 4. Medida del desplazamiento angular y una comparación de unidades.

EJEMPLO 1

Si la longitud del arco s es 4 ft y el radio es de 9 ft, calcule el desplazamiento angular θ en radianes, grados y revoluciones.

Solución.

Sustituyendo directamente en la ecuación $\theta = \frac{s}{R}$ obtenemos que

$\theta = \frac{s}{R} = \frac{4ft}{9ft} =$ .4 rad

Convirtiendo nos queda

$$\theta = (.4\, rad)\frac{57.3°}{1\, rad} = 22.92°$$

Y ya que 1 rev es igual a 360°

$$\boldsymbol{\theta = (22.92°)\frac{1\, rev}{360°} = .0636\, rev}$$

Ejemplo 2

Un punto situado de un disco giratorio cuyo radio es de 8 m se mueve a través de un sngulo de 37°. Calcule la longitud del arco descrito por el punto .

Solución

Puesto que la ecuación $\theta = \frac{s}{R}$ quedo definido un ángulo medido en radianes, primero debemos convertir los 37° en radianes.

$$\theta = (37°)\frac{1\, rad}{57.3°} = .646\, rad$$

La longitud está dada por

$$s = R\theta = 8m\,(.646\, rad) = \mathbf{5.17\, m}$$

La unidad radian desaparece porque representa una relación de longitud a longitud (m/m=1).

VELOCIDAD ANGULAR

A la razón de cambio del desplazamiento angular conrespecto al riempo se le llama velocidad angular. Por lo tanto, si un objeto gira a través de un angulo θ en un tiempo t, su velocidad angular edia esta dada por

$$\overline{\omega} = \frac{\theta}{t}$$

El símbolo de ω,(letra griega omega), se usa para denotar la velocidad rotacional. Aun cuando la velocidad angular puede expresarse en revoluciones por minuto o revoluciones por segundo, en la mayoría de los problemas físicos es necesario utilizar radianes por segundo para adaptarse a formulas más convenientes. Puesto que la velocidad de rotación en gran número de problemas técnicos se expresa en términos de la frecuencia de revoluciones, la siguiente relación será de utilidad:

$$\omega = 2\pi f$$

Donde ω *se mide en radianes por segundo y* f *se mide en revoluciones por segundo*.

EJEMPLO

La rueda de una bicicleta tiene un diámetro de 66 cm y da 40 revoluciones en 1 min. ¿Cuál es la velocidad angular? ¿Qué distancia lineal se desplazara la rueda?

Solucion Primera pregunta

La velocidad angular depende tan solo de la frecuencia de rotación. En vista que 1 rev $= 2\pi$ radianes

$$f = \left(\frac{40\ rev}{min}\right)\left(\frac{1\ min}{60\ s}\right) = .667\ rev/s$$

Sustituyendo el valor en la ecuación $\omega = 2\pi f$ se obtiene que la velocidad angular es

$$\boldsymbol{\omega = (2\pi\ rad)\left(.667\frac{rev}{s}\right) = 4.19\frac{rad}{s}}$$

Solución segunda pregunta

El desplazamiento lineal s se puede calcular a partir del desplazamiento angular θ en radianes.

$$\theta = \left(\frac{2\pi\ rad}{1\ rev}\right)(40\ rev) = 251\ rad$$

Despejanado s de la ecuación $\theta = \frac{s}{R}$, obtenemos

$s = \theta R = (251\ rad)(.33m) = \mathbf{82.8m}$

ACELERACION ANGULAR CONSTANTE

Al igual que al movimiento lineal, el movimiento rotacional puede ser uniforme o acelerado. La rapidez de la rotación puede aumentar o disminuir bajo la influencia de un momento de torsión resultante. Por ejemplo, si la velovidad angular cambia de un valor inicial ω_0 a un valor final ω_f en un tiempor t, la aceleración angular es

$$\alpha = \frac{\omega_{f-}\omega_0}{t}$$

La letra griega $\alpha(alfa)$ denota la aceleración angular. Una forma más útil para esta ecuación es

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

Al comparar las ecuaciones para la aceleración lineal se verá que sus formas son idénticas si establecemos analogías entre parámetro angulares y lineales. Ahora que hemos introducido el concepto de velocidades angulares iniciales y finales, podemos expresar la velocidad angular media en términos de sus valores iniciales y finales

$$\bar{\omega} = (\frac{\omega_f + \omega_0}{2})$$

Al sustituir esta igualdad para $\bar{\omega}$ en la ecuación se obtiene una expresión más útil para el desplazamiento angular

$$\theta = \bar{\omega}t = \left(\frac{\omega_f + \omega_0}{2}\right)t$$

EJEMPLO 1

Un volante aumenta su velocidad de rotación de 6 a 12 rev/s en 8 s. ¿cuál es su aceleración angular?

Solucion

Calcularemos primero las velocidades angulares inicial y final

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \left(\frac{2\pi\, rad}{\cancel{rev}}\right)\left(\frac{6\,\cancel{rev}}{s}\right) = 12\pi\frac{rad}{s}$$

$$\omega_f = 2\pi f_0 = \left(\frac{2\pi\, rad}{\cancel{rev}}\right)\left(\frac{12\,\cancel{rev}}{s}\right) = 24\pi\frac{rad}{s}$$

$$\alpha = \frac{\omega_{f-}\omega_0}{t} = \frac{\frac{(24\pi - 12\pi)rad}{s}}{8s} = \mathbf{4.71}\frac{\boldsymbol{rad}}{\boldsymbol{s^2}}$$

EJEMPLO 2

Una rueda de esmeril que gira inicialmente con una velocidad angular de 6 rad/s recibe una aceleración constante de 2 rad/s^2.1.- ¿Cuál será su desplazamiento angúlar en 3 s? 2.- ¿Cuantas revoluciones habrá dado?3.- ¿Cual es su velocidad angular final?

Solución 1

El deslazamiento angular esta dado por

$\theta = \ = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$$= \left(6\frac{rad}{s}\right)(3\ s) + \ \frac{1}{2}(2\frac{rad}{s^2})\ (3\ s)^2$$

$$= 18\ rad + \left(1\frac{\text{rad}}{s^2}\right)(9\ s^2)$$

$$= \mathbf{27\ rad}$$

Solucion 2

Puesto que 1 rev = $2\pi\ rad,$ obtenemos

$$\theta = (27\ rad)\frac{1\ rev}{2\pi\ rad}) = \mathbf{4.30\ rev}$$

Solucuion 3

La velocidad angular final es igual a la velocidad angular inicial mas el cambio en velocidad, por consiguiente,

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t = 6\frac{rad}{s} + \ \left(2\frac{rad}{s^2}\right)(3\ s)$$

$$= \mathbf{12\ rad/s}$$

RELACION ENTRE LOS MOVIMIENTOS ROTACIONAL Y LINEAL

El eje de rotación de un cuerpo rigido que gira se puede definir como la línea de partículas que permanecen estacionarias durante la rotación. Se puede tratar de una línea a través del cuerpo, como en el caso de un trompo, o puede ser una línea a través del espacio, como un aro de rotación. En cualquier caso nuestra ezperiencia nos dice que cuanto mas lejos este la particula del eje de rotación, mayor es su velocidad lineal.

$$v = 2\pi f R$$

Donde f es la frecuencia de la rotación. Ahora derivamos una relacuon similar en términos de velocidad angular.

$$s = \ \theta R$$

$$\Rightarrow v = \frac{s}{t} = \frac{\theta R}{t}$$

Puesto que $\frac{\theta}{t} = \omega$, la velocidad lineal puede expresar como una función de la velocidad angular.

v=ωR

Este resultado también proviene de la ecuación $\omega = 2\pi f$, en la cual la velocidad angular se expresa como una función de la frecuencia de revolución.

EJEMPLO 1

Un eje de tracción tiene una velocidad angular de 60 rad/s ¿ a qué distancia del eje deben colocarse unos contrapesos para que estos tengan una velocidad lineal de 12 m/s?

Solucion

Despejando R en la ecuación v=ωR, obtenemos

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{12\, m/s}{60\, rad/s} = \mathbf{.200\ m}$$

Consideremos de nuevo una particula que se mueve en un circulo de radio R y supongamos que la velocidad lineal cambia de cierto valor inicial v_0 al valor final v_f en un tiempo t. La aceleración tangenical a_t dedicha particula ta dada por

$$a_T = \frac{v_f - v_0}{t}$$

Debido a la estrecha relación entre la velocidad lineal y la angular, como quedo represntada en la ecuación v=ωR podemos expresar tambien la aceleración tangencial en términos de un cambio en la aceleración angular

$$a_T = \frac{\omega_f R - \omega_0 R}{t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} R$$

O bien

$$a_T = \alpha R$$

Donde $\alpha\, representa\ la\ aceleracion\ angular.$

Debemos ser cuidadosos en distinguir entre la aceleración tangencial, como quedo definida en la ecuación $a_T = \alpha R$, y la acelracion centrípeta definado por

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

La aceleración tangencial representa un cambio en la velocidad lineal, mientras que la aceleración centrípeta representa un tan solo un cambio en la dirección del movimiento. La distinción se muestra gráficamente en la figuara

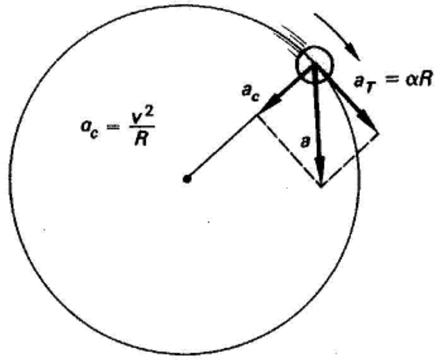


Figura 5. Relación entre la aceleración tangencial y centrípeta.

EJEMPLO 2

Calcule la aceleración tangencial según la ecuación $a_T = \alpha R$es

$$a_T = \alpha R = \left(4\frac{rad}{s^2}\right)(.5\, m) = 2\frac{m}{s^2}$$

Como $v = \omega R$, la aceleración centrípeta está dada por

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

De donde obtenemos

$$a_c = (3\frac{rad}{s})^2(.5\, m) = 4.5\, m/s^2$$

Por ultimo, la magnitud de la acelracion resultante se obtiene del teorema de pitagoras

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = \sqrt{2^2 + 4.5^2}$$

$$= \mathbf{4.92}\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s^2}}$$

BIBLIOGRAFIA

Conceptos y aplicaciones sexta edición, Paul E. Tippens,departamento de física Southerm Polytechnic State University Marietta, Georgia .

Relatividad

Un marco de referencia inercial es aquel en el que las leyes de Newton son validas

Relatividad Clásica.

Principio clásico de la relatividad.

"Yo no os las propongo como leyes inquebrantables, sino como razones que tienen alguna verosimilitud" – Galileo Galilei

Galileo Galilei astrónomo, físico, matemático y filósofo; nació en Pisa en el año 1564, fue el mayor representante de la revolución científica del Renacimiento. Perseguido por la iglesia durante el oscurantismo medieval por ser un gran partidario del heliocentrismo de Copérnico; formulo las primeras leyes sobre el movimiento e introdujo la metodología experimental, logro que le adjudico el título del padre de la ciencia moderna.

En enero de 1609, Galileo construye un telescopio después de recibir la noticia que un holandés había creado un instrumento óptico. El siguiente año realizó con su telescopio las primeras observaciones de la Luna, descubriendo que en el satélite existían montañas; con este descubrimiento desacredito las tesis aristotélicas tradicionales acerca de la perfección del mundo celeste, que exigían la completa esfericidad de los astros.

En el año 1632 se publica su obra *"Diálogo sobre los principales sistemas del mundo"* donde introduce el principio de la relatividad clásica, la cual establece que Dos sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación rectilínea uniforme son equivalentes desde el punto de vista mecánico; es decir, los experimentos mecánicos se desarrollan de igual manera en ambos, y las leyes de la mecánica son las mismas.

O como él lo explica en su obra entro los diálogos de Simplicio y Salviati "Encerraos con un amigo en la cabina principal bajo la cubierta de un barco grande, y llevad con vosotros moscas, mariposas, y otros pequeños animales voladores, colgad una botella que se vacíe gota a gota en un amplio recipiente colocado por debajo de la misma, haced que el barco vaya con la velocidad que queráis, siempre que el movimiento sea uniforme y no haya fluctuaciones en un sentido u otro. Las gotas caerán en el recipiente inferior sin desviarse a la popa, aunque el barco haya avanzado mientras las gotas están en el aire las mariposas y las moscas seguirán su vuelo por igual hacia cada lado, y no sucederá que se concentren en la popa, como si cansaran de seguir el curso del barco.” Haciendo uso de esta lógica y diversos ejemplos da argumentos válidos a la teoría de Copérnico mientras se mofa de las creencias Aristotélicas y Eclesiásticas. No haciendo otra cosa más que el estudio del movimiento de una partícula condicionado a un sistema de referencia arbitrariamente escogido. De este modo se establece que la percepción y la medida de las magnitudes físicas varían en función al sistema de referencia escogido. Un ejemple lo da el mismo Galileo, cuando habla de disparar dos balas en direcciones opuestas partiendo del mismo punto, oriente y poniente, teniendo mayor distancia recorrida la bala hacia poniente.

Debido al contenido copernicano de sus obras fue llevado ante la corte de la Inquisición en diversas ocasiones. Siendo la última de ellas donde se le forza a adjudicar de su doctrina y es condenado a prisión perpetua. Su obra “*El Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo*” ingresó en el Índice de libros prohibidos y no salió de él hasta 1728. Entre las anécdotas que existen sobre este suceso se cuenta que al terminar el juicio y haber renunciado a sus creencias Galileo pronuncio las palabras “Eppur si muove”, (Y sin embargo, la Tierra se mueve).

Grupo de transformaciones galileanas

Conociendo que estudiamos el movimiento de una partícula condicionando su sistema de referencia analizaremos la transformación formulada por Galileo.

Una transformación de Galileo es un cambio de coordenadas y velocidades que deja invariante las ecuaciones de Newton. La condición anterior equivale a que la transformación entre las coordenadas de un sistema de referencia inercial y otro sistema inercial que se mueve respecto al primero sea también una transformación de Galileo.

Se estableció que, si se tiene un sistema ***A*** en reposo y un sistema ***B*** en movimiento, a velocidad constante ***Vx*** respecto del primero a lo largo del sentido positivo del eje **x**, y si las coordenadas de un punto del espacio para **A** son (**x, y, z**) y para **B** son (**x’, y’, z’**) se puede establecer un conjunto de ecuaciones de transformación de coordenadas.

En cuanto al tiempo, suponiendo que transcurra igual para cada observador, quedaría como **t=t'**.

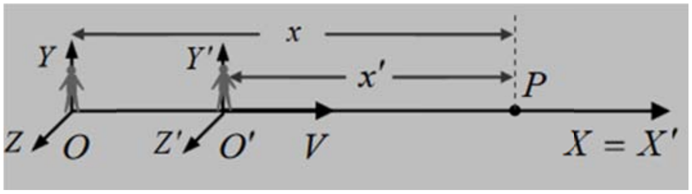


Figura 1

En la figura se muestran dos observadores **O** y **O'** situados en dos sistemas de referencia inerciales diferentes, de modo que **O'** se mueve respecto a **O** a lo largo del eje **OX** común con un movimiento rectilíneo uniforme de velocidad **V**. **P** es un punto material que se mueve, a lo largo de **OX**, con velocidades **v** y **v'** respecto a **O** y a **O'**. Las posiciones de P respecto a **O** y a **O'** quedan determinadas por sus respectivas coordenadas **x** y **x'**.

.

Se quiere comparar la descripción del movimiento del punto **P** que hacen los dos observadores. De la figura se desprende que $\boldsymbol{X = \overline{OO'} + x'}$

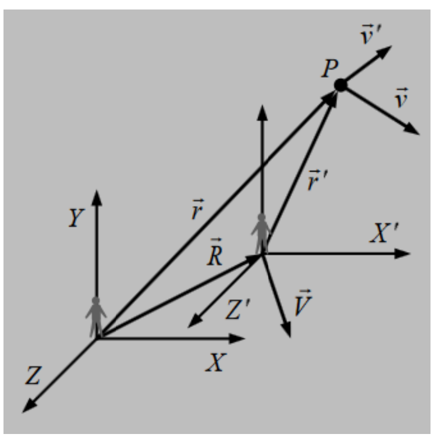


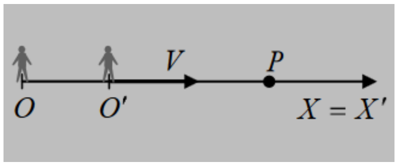
Figura 2

Realizando el experimento de forma que **O** y **O'** coincidan en el mismo punto en el instante en que se empieza a contar el tiempo y ponemos el reloj a cero $\boldsymbol{t_0 = 0}$, ya que la velocidad de **O'** respecto a **O** es constante, se obtiene en un instante arbitrario que: $\boldsymbol{\overline{OO'} = Vt}$
$\boldsymbol{x = x' + Vt}$ $\boldsymbol{x = x' - Vt}$

Vectorialmente esto es $\boldsymbol{\vec{r}' = \vec{r} - \overrightarrow{v_t}}$

Asumiendo que la velocidad $\vec{v}$ es paralela con **OX** se obtiene que: **Vx=V, Vy=0, Vz=0** y al expresarlo con la transformación de Galileo quedaría de la siguiente manera:

x'=x-Vt, **y'=y,** **z'=z,** **t'=t**



Considerando el movimiento de **O'** y de **P** a lo largo del eje **OX** común. La velocidad de **P** respecto a **O** se define como $v = dx/dt$ y la de **P** respecto a **O'** como $v' = dx'/dt$ derivando la ecuación con respecto al tiempo se obtiene que

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - v_t) = \frac{dx}{dt} - v\frac{dt}{dt}$$

Experimento de Michelson-Morley

Después del desarrollo de la teoría de Maxwell del electromagnetismo, se realizaron varios experimentos para probar la existencia del éter y su movimiento relativo a la Tierra. El más famoso y exitoso fue el que ahora se conoce como el experimento de Michelson-Morley, interpretado por Albert Michelson y Edward Morley en 1887.

Michelson y Morley construyeron un interferómetro de Michelson, que consiste esencialmente en una fuente de luz, una placa de cristal medio plateada, dos espejos y un telescopio. Los espejos se colocan en ángulo recto entre sí ya una distancia igual de la placa de vidrio, que está orientada oblicuamente en un ángulo de 45° con respecto a los dos espejos. En el dispositivo original, los espejos se montaron sobre una base rígida que giraba libremente sobre un recipiente lleno de mercurio líquido para reducir la fricción.

Las teorías prevalecientes sostuvieron que el éter formó un marco de referencia absoluto con respecto al cual el resto del mundo fue estacionario. Por lo tanto, se deduce que debería parecer moverse desde la perspectiva de un observador en la Tierra en órbita del Sol. Como resultado, la luz a veces viajaba en la misma dirección del éter, y otras veces en la dirección opuesta. Así, la idea era medir la velocidad de la luz en diferentes direcciones para medir la velocidad del éter respecto a la Tierra, estableciendo así su existencia.

Michelson y Morley fueron capaces de medir la velocidad de la luz buscando franjas de interferencia entre la luz que había pasado a través de los dos brazos perpendiculares de su aparato. Esto ocurriría ya que la luz viajaría más rápido a lo largo de un brazo si se orientaba en la misma dirección que el éter se movía, y más lenta si se orientaba en la dirección opuesta. Puesto que los dos brazos eran perpendiculares, la única manera en que la luz viajaría a la misma velocidad en ambos brazos y por lo tanto llegarían simultáneamente al telescopio sería si el instrumento estuviera inmóvil con respecto al éter. De lo contrario, las crestas y valles de las ondas luminosas de los dos brazos llegarían e interferirían ligeramente fuera de sincronización, produciendo una disminución de intensidad.

Aunque Michelson y Morley esperaban medir diferentes velocidades de luz en cada dirección, no encontraron franjas discernibles que indicaran una velocidad diferente en cualquier orientación o en cualquier posición de la Tierra en su órbita anual alrededor del Sol.

En 1895, Lorentz concluyó que el resultado "nulo" obtenido por Michelson y Morley fue causado por un efecto de la contracción hecha por el éter en su aparato e introdujo la ecuación de la contracción de la longitud

$$\boldsymbol{L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde **L** es la longitud contraída, **L0** es la longitud del restante, **v** es la velocidad del marco de referencia, y **c** es la velocidad de la luz. Aunque la principal interpretación de Lorentz para esta ecuación fue rechazada posteriormente, la ecuación sigue siendo correcta y fue la primera de una secuencia de nuevas ecuaciones desarrolladas por Poincaré, Lorentz, y otros, dando por resultado una nueva rama de la física finalmente traída a la fruición por el Albert Einstein en la relatividad especial. La idea de Einstein de contracción espacio-temporal reemplazó la interpretación de Lorentz de la ecuación de contracción, y de una vez por todas relegó el éter a los libros de historia.

--- POSTULADOS

1.-El Postulado de la Relatividad: Las leyes de la física son las mismas para observadores en todos los marcos de referencia “Inerciales”. Ningún marco es más valido que cualquier otro.

2.-El Postulado de la Velocidad de la Luz: La velocidad de la luz en el vacío tiene el mismo valor “c” en todas las direcciones y en todos los marcos de referencia inerciales.

Ninguna partícula que tenga masa puede alcanzar la velocidad de “c” no importa por qué cantidad o por cuanto tiempo la partícula sea acelerada

“C” tiene una velocidad de 299792458 m/s aunque se suele usar la aproximación de $3.0x10^8$ en este capítulo usaremos frecuentemente el valor exacto asi que se recomienda guardar el valor exacto en la memoria de la calculadora para poder llamar fácilmente al valor cuando se requiera.

---La Relatividad de la Simultaneidad.

Supongamos que un observador (Sam) identifica 2 eventos independientes que ocurren al mismo tiempo, supongamos que un segundo observador (Sally) que se mueve a una velocidad constante “V” con respecto a Sam, y también registra los mismos 2 eventos. Sally será capaz de identificar que ambos eventos ocurren al mismo tiempo? La respuesta general es no.

Sin dos observadores están en movimiento relativo, en general no estarán de acuerdo en si 2 eventos ocurren simultáneamente, si un observador encuentra que los eventos son simultáneos, el otro en general no lo hará.

La simultaneidad no es un concepto absoluto, mas bien uno relativo dependiendo de el movimiento del observador.

---La Relatividad del Tiempo.

Si dos observadores que se mueven relativamente con respecto al otro midieran un intervalo de tiempo (o separación temporal) entre dos eventos, generalmente encontraran sus resultados diferentes. Porque? La razón es que la separación espacial de dos eventos puede afectar los intervalos de tiempo medidos por los observadores.

El intervalo de tiempo entre dos eventos depende en que tan lejos ocurra el uno del otro en ambos espacio y tiempo; eso quiere decir que separación espacio-temporal están entrelazadas.

Para encontrar la diferencia entre dos mediciones de dos observadores una (Δt) respecto a la otra (Δt_0) se usa la fórmula:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Cuando dos eventos ocurren en la misma locación en un marco referencial inercial el intervalo de tiempo entre ellos, medido en ese marco de referencia se le llama **tiempo propio.** Mediciones en el mismo intervalo de tiempo desde cualquier otro marco de referencia inercial siempre son mayores.

De esta manera un observador mide un intervalo de tiempo propio mientras el otro mide uno mayor, la diferencia de medida entre el intervalo propio y el mayor se le conoce como **dilatación del tiempo.** usualmente el ratio adimensional v/c en la ecuación anterior es remplazado por β llamado el **parámetro de velocidad,** y las dimensiones de la inversa de la raíz cuadrada se remplazan usualmente con γ, llamada el **factor de Lorentz:**

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Con estos remplazos podemos rescribir la ecuación anterior como:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \ (dilatacion\ del\ tiempo)$$

---Problema muestra

Tu nave espacial pasa la Tierra con una velocidad relativa de 0.9990c. Después de viajar 10 años (tu tiempo) paras en un puesto de observación LP13te das vuelta y regresas a la Tierra con la misma velocidad relativa, el viaje de regreso toma otros 10 años. Cuánto tarda el viaje en medidas de la Tierra? (ignora cualquier efecto relacionado con aceleración, vuelta y regreso a la velocidad.)

Cálculos: $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

$$\Delta t = \frac{10.0_{años}}{\sqrt{1-(0.9990c/c)^2}} = (22.37)(10.0) = 224_{años}$$

Para el viaje de regreso tenemos el mismo caso y la misma información entonces:

$$\Delta t_{total} = (2)(224_{años}) = 448_{años} \ (resultado)$$

---La Relatividad de la Distancia

Si quieres medir la longitud de una barra que se encuentra en movimiento tienes que considerar ambas posiciones de sus puntas como simultaneas en el mismo marco de referencia de tu medición o esta no puede ser llamada longitud.

Propongamos L_0 ser la longitud de una barra que mides cuando la barra es estacionaria (lo que significa que tu y la barra se encuentran en el mismo marco estacionario de referencia). Si por el contrario hay movimiento relativo "v" entre tu y la barra y a lo largo de la barra entonces por mediciones simultaneas obtenemos una longitud L dada por:

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma}\ (contraccion\ de\ longitud)$$

La longitud L_0 de un objeto medido en el marco del reposo es denominada su **longitud propia** o **longitud de reposo**. Mediciones de esta longitud desde cualquier otro marco de referencia que se encuentre en movimiento relativo paralelo a la longitud del objeto siempre son menores que la longitud propia.

La contracción de longitud ocurre solo a lo largo de la dirección de un movimiento relativo. La distancia que es medida no necesariamente tiene que ser en relación a un objeto también puede ser una distancia entre dos objetos dentro del mismo marco de referencia.

---La transformación de Lorentz

Las ecuaciones de transformación de Galileo:

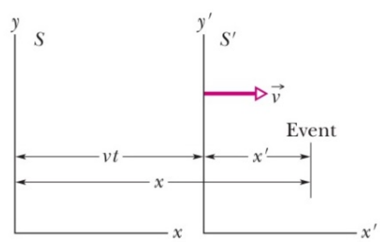


Figure 37-9 Two inertial reference frames: frame S' has velocity $\vec{v}$ relative to frame S.

La imagen 37-9 muestra un marco de referencia inercial S' moviéndose con una velocidad *v* relativa al marco S en la dirección común positiva de sus ejes horizontales. Tenemos que un observador en S reporta un juego de coordenadas *x, y, z, t* y otro observador en S' reporta otro *x', y', z', t'* para el mismo evento como se relacionan estos números?

Decimos entonces que las coordenadas *y* y *z* que son perpendiculares al movimiento no son afectadas por el movimiento esto quiere decir que *y = y'* y *z = z'*

Nuestro interés se reduce entonces a la relación entre *x* y *x'* y entre *t* y *t'*.

Antes de la publicación de la teoría especial de la relatividad de Einstein las cuatro coordenadas de interés estaban relacionadas por las ecuaciones de Transformación de Galileo.

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

Estas ecuaciones son aproximadamente validas a bajas velocidades. Estas ecuaciones están escritas bajo las asunción de que t = t’ = 0 cuando los orígenes de S y S’ coinciden. La segunda ecuación mencionada anteriormente demuestra esto cuando asegura que el tiempo transcurre al mismo ratio para ambos observadores en ambos marcos de referencia.

Las ecuaciones de transformación de Lorentz:

Las ecuaciones anteriores funcionan bien cuando la velocidad V es pequeña comparada con C pero en realidad son incorrectas para cualquier velocidad y muy incorrectas para velocidades mayores de 0.10c. Las ecuaciones que son correctas para cualquier velocidad físicamente posible son llamadas ecuaciones de transformación de Lorentz.

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$$

Nótese que los valores espaciales de x y los valores temporales de t están entrelazados en la primera y la ultima ecuación. Este entrelazamiento de espacio y tiempo era un mensaje principal de la teoría de Einstein, un mensaje que fue rechazado por mucho tiempo por sus colegas.

Es un requerimiento de las ecuaciones relativas el reducirse a ecuaciones clásicas si dejamos que c se aproxime al infinito. Esto quiere decir que si la velocidad de luz fuera infinitamente grande todas las velocidades finitas deberían ser pequeñas y las ecuaciones clásicas nunca fallarían. Por otro lado si dejamos que $c \to \infty$ tenemos que $\gamma \to 1$ reduciendo esta a las ecuaciones de Galileo.

Las ecuaciones anteriores relacionan las coordenadas de un segundo evento cuando el primer evento es el paso por los orígenes de S y S’ en $t = t' = 0$ sin embargo en general no queremos este tipo de restricción así que vamos a reescribir las ecuaciones de Lorentz en términos de un par de eventos 1 y 2 con separaciones espaciales y temporales

1 $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$	1' $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$
2 $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$	2' $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})$

Tabla 37-2, Ecuaciones de Lorentz.

---Consecuencias de las ecuaciones de Lorentz

Aquí usaremos las ecuaciones de la tabla 37-2 para afirmar algunas de las conclusiones que encontramos anteriormente mediante los postulados.

Simultaneidad:

Considere la ecuación 2 de la tabla 37-2

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2})$$

Si dos eventos ocurrieran en diferentes lugares en el marco de referencia S' de la figura 37-9 entonces $\Delta x'$ en esta ecuación no es 0. Incluso si los eventos son simultáneos en S' $(\Delta t = 0)$, no serán simultáneos en S. El intervalo de tiempo entre los eventos en S es:

$$\Delta t = \gamma \frac{v\Delta x'}{c^2} \; (eventos\ simultaenos\ en\ S')$$

De esta forma la separación espacial $\Delta x'$ garantiza una separación temporal Δt.

Dilatación del tiempo:

Supongamos ahora que dos eventos ocurren en el mismo lugar en S' $(\Delta x' = 0)$ pero en tiempos diferentes $(\Delta t' \neq 0)$. La ecuación 2 de la tabla 37-2 se reduce a:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Esto confirma la dilatación del tiempo entre los marcos S y S'. Más que eso porque los dos eventos ocurren en el mismo lugar en S', el intervalo de tiempo $\Delta t'$ entre ellos puede ser medido con un solo reloj localizado en el lugar del evento. Bajo estas condiciones la medida del intervalo es una medida de tiempo propio y la podemos etiquetar Δt_0 como lo hemos hecho antes con tiempos propios. Entonces tenemos que la ecuación se vuelve:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \ (Dilatacion\ del\ tiempo)$$

Contracción de longitud:

Considerando la ecuación 1' de la tabla 37-2,

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

¿Si una barra yace paralela a los ejes *x* y *x'* de la figura 37-9 y se encuentra en reposo en el marco de referencia S', un observador en S' puede medirlo sin problemas. Una manera de hacerlo es mediante la sustracción de las coordenadas de las puntas de la barra. El valor de $\Delta x'$ que se obtiene será la longitud propia L_0 de la barra porque la medición se realiza en un marco de referencia donde se encuentra en reposo.

Supongamos que la barra se mueve en el marco de referencia S. esto significa que Δx puede ser identificada como la longitud L de la barra en el marco S solo si las coordenadas de las puntas de la barra son medidas simultáneamente eso es si $\Delta t = 0$. Si ponemos $\Delta x' = L_0$, $\Delta x = L$ y $\Delta t = 0$ en la ecuación anterior encontramos que:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \ (contraccion\ de\ longitud)$$

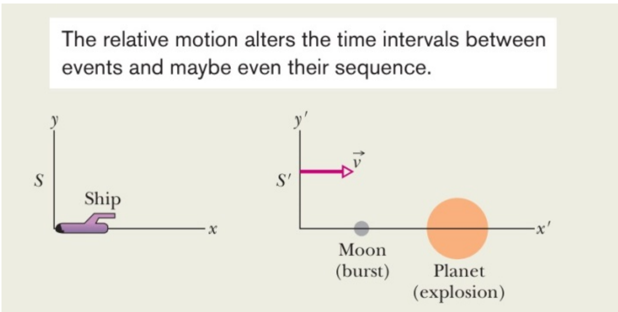
Problema Muestra: Transformaciones de Lorentz y la inversión de una secuencia de eventos

Una nave de la tierra a sido enviada a checar una base de la tierra en el planeta P1407, cuya luna contiene un grupo de batalla de los comúnmente hostil de Retinlianos. Mientras la nave sigue una trayectoria de línea recta primero pasa por el planeta y luego pasa por la luna, detecta una ráfaga de microondas de alta energía en la base de la luna Reptiliana y después 1.10s una explosión en la base de la tierra que se encuentra a 4.00×10^8m de distancia de la base Reptiliana medido desde el marco de referencia de la nave. Los Reptilianos obviamente atacaron la base de la tierra asi que la nave se prepara para una confrontación con ellos.

(a)la velocidad de la nave relativa al planeta y a su luna es de 0.980c. cual es la distancia y el intervalo de tiempo entre la ráfaga y la explosión medido desde el marco de referencia planeta-luna?

Resolucion:

Marco de referencia de la nave: antes de que vayamos a la transformación primero tenemos que escoger cuidadosamente nuestra notación.



Basados en el boceto escogimos el marco de referencia de la nave S para ser estacionario y el marco del planeta-luna S' para estar en movimiento con una velocidad positiva (derecha). Los subíndices *e(explosión)* y *b(burst)* representan la explosión y la ráfaga respectivamente. Entonces la informacio obtenida en el marco de referencia S tenemos:

$$\Delta x = x_e - x_b = +4.00 \times 10^8 m$$

$$\Delta t = t_e - t_b = +1.10s$$

Aquí, Δx es una cantidad positiva porque en el boceto la coordenada $x_e$para la explosión es mayor que la coordenada de x_b de la ráfaga; Δt también es positiva porque el tiempo de la explosión es mayor (después) que el de la ráfaga.

Marco de referencia Planeta-Luna: Buscamos $\Delta x' \, y \, \Delta t'$ que debemos de obtener mediante la transformación de los datos del marco S a los de S'. Porque estamos considerando un par de eventos, escogimos las ecuaciones de transformación de la tabla 37-2 sean, Eqs 1' y Eqs 2':

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2})$$

Tenemos, *v* = +0.980c y el factor de Lorentz es:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v^2}{c^2})}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (+\frac{0.980c}{c})^2}} = 5.0252$$

Sustituyendo en 1':

$$\Delta x' = (5.0252)[4.00 \times 10^8 m - (+0.980c)(1.10s)] = 3.86 \times 10^8 m \; (resultado)$$

Sustituyendo en 2':

$$\Delta t' = (5.0252)[(1.10s) - \frac{(+0.980c)(4.00 \times 10^8 m)}{c^2}]$$

$$\Delta t' = -1.04s\ (resultado)$$

(b) Cual es el significado del signo negativo en el valor $\Delta t'$?

Razonamiento: Tenemos que ser consistentes con la notación que usamos en (a). Recordar como originalmente definimos el intervalo de tiempo entre la ráfaga y la explosión $\Delta t = t_e - t_b = +1.10s$. Para ser consistentes con esa notación, nuestra definición de $\Delta t'$ debe de ser $t_e' - t_b'$; entonces podemos encontrar que:

$$\Delta t' = t_e' - t_b' = -1.04s$$

El signo negativo aquí nos dice que $t_b' > t_e'$ eso es en el marco de referencia planeta-luna por lo que la ráfaga ocurrió 1.04s después de la explosión, no 1.10s antes de la explosión como detecto el marco de referencia de la nave.

(c) la ráfaga causo la explosión o vice-versa?

Razonamiento: la secuencia de eventos medidos en el planeta-luna es el inverso de los medidos en la nave. En cualquier situación si hay una relación causal entre 2 eventos la información debe viajar desde la locación de uno hacia el otro para causarlo.

Revisar la velocidad: revisemos la velocidad requerida para la información. En el marco de referencia de la nave esto es:

$$v_{info} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4.00 \times 10^8 m}{1.10s} = 3.64 \times 10^8 m/s$$

Esta velocidad es imposible porque supera la constante c en el marco de referencia planeta-luna la velocidad es $3.70 \times 10^8 m/s$, también imposible. Por lo que ninguno de los evento pudo haber causado el otro ya que son eventos no relacionados. Es este caso la nave debería bajar las armas y no atacar a los Reptilianos.

REFERENCIAS:

French, A. P. (2002). *Relatividad especial, Volumen 1*. Barcelona: Reverte.

Galilei, G. (1632). *DIALOGOS SOBRE LOS DOS MAXIMOS ISTEMAS DEL MUNDO: PTOLEMAICO Y COPERNICANO*. Florencia.

Goldstein, H. (2000). *Mecánica clásica*. Mexico: Reverte.

Moderna, F. (2007). *Jorge Enrique Figueroa Martínez*. Naucalpan de Juarez: Prentice Hall.

Tipler, P. A. (2003). *Física moderna*. Barcelona: Reverte.